

Карагандинский национальный исследовательский университет
имени академика Е.А. Букетова

УДК 517.95

На правах рукописи

ИЖАНОВА КАМИЛА АЛИБЕКОВНА

**Краевые задачи для двумерного нагруженного уравнения
теплопроводности**

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный консультант
доктор PhD,
ассоциированный профессор
М.Т. Космакова

Зарубежный научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
А.В. Псху

Республика Казахстан
Караганда, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	3
ВВЕДЕНИЕ	6
1 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	24
1.1 Краевая задача в конусообразной области.....	24
1.2 Сигнальная задача.....	33
1.3 Эффект неединственности решения.....	43
2 НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФУЗИОННО- ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ	48
2.1 Плоская задача Коши для уравнения дробной диффузии	48
2.2 Одномерная задача Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения с временной нагрузкой	53
2.3 Одномерная задача Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения с пространственной нагрузкой.....	56
2.4 Задача Коши в многомерной области для дробной диффузии уравнения с вырождающейся нагрузкой	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	70
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	71

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В настоящей диссертации применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Дробная производная в смысле Римана-Лиувилля обозначается формулой (1):

$${}_r D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \beta, a \in R, n-1 < \beta < n \quad (1)$$

Дробная производная в смысле Римана-Лиувилля в начале точки $a = 0$ и при $\beta \in (0,1)$:

$$D_{0t}^\beta u(x, y; t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(x, y; \tau)}{(t-\tau)} d\tau \quad (2)$$

Интеграл ошибок:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi \quad (3)$$

Дополнительный интеграл ошибок:

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (4)$$

Пусть $\varphi(x) \in L_1[a; b]$. Тогда интеграл:

$$(I_{ax}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a$$

называется дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка α , здесь $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ интеграл $(I_{ax}^0 \varphi)(x) = \varphi(x)$ [1].

Замечание 1. Достаточным условием существования дробного интеграла является следующее условие: $\varphi(t) \in L_1[a; b]$.

Замечание 2. Для первой краевой задачи в области $0 < x < \infty$ и условиях:

$$\begin{aligned} w &= f(x) \text{ при } t = 0 \\ w &= g(x) \text{ при } x = 0 \end{aligned}$$

дифференциальное уравнение следующего типа:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x, t)$$

имеет решение [2]:

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(\xi)G(x, \xi, t)d\xi + \int_0^t g(\tau)H(x, t - \tau)d\tau + \int_0^t \int_0^\infty \Phi(\xi, \tau)G(x, \xi, t - \tau)d\xi d\tau \quad (5)$$

здесь

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left(\exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4at} \right] \right) \\ H(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi at^3}} \exp \left(-\frac{x^2}{4at} \right) \quad (6)$$

Функция Грина $G(x, \xi, t - \tau)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t)d\xi = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (7)$$

Обобщенный гипергеометрический ряд – это ряд в виде:

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\prod_{h=1}^p (\alpha_h)_k z^k}{\prod_{h=1}^q (\rho_h)_k k!} \quad (8)$$

где $(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ - символ Похаммера.

Функция в виде ряда:

$$e_{\alpha, \beta}^{\mu, \sigma}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu) \Gamma(\delta - \beta n)}, \alpha > \beta, \alpha > 0, z \in \mathbb{C} \quad (9)$$

при $\alpha = \mu = 1$ функция является функцией Райта:

$$e_{1, \beta}^{1, \sigma}(z) = \phi(\beta, \sigma, z).$$

здесь

$$\phi(\rho, \mu, z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n! \Gamma(\rho n + \mu)} \quad (10)$$

Теорема. Гипергеометрическую последовательность ${}_pF_q(\alpha_p; \rho_p; -z)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
e^{-\theta z} &< {}_pF_q(\alpha_p; \rho_p; -z) < 1 - \theta + \theta e^{-z}, \\
e^{\theta z} &< {}_pF_q(\alpha_p; \rho_p; z) < 1 - \theta + \theta e^z, \\
1 - \theta z \left(1 - \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} e^{-z}\right) &< {}_pF_q(\alpha_p; \rho_p; -z) < 1 - \theta z e^{-\frac{\phi z}{2}}, \\
1 + \theta z e^{-\frac{\phi z}{2}} &< {}_pF_q(\alpha_p; \rho_p; z) < 1 + \theta z \left(1 - \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} e^z\right), \\
z > 0, \rho_k &\geq \alpha_j > 0, j = 1, 2, \dots, p.
\end{aligned}$$

Пусть $f(t) \in AC^n[a, b]$, т.е. $f^{(n-1)}(t)$ является абсолютно непрерывной функцией). Тогда производная Капуто порядка β определяется следующим образом:

$${}_cD_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \beta, a \in \mathfrak{R}, n-1 < \beta < n \quad (11)$$

Из формулы (1) следует, что

$${}_rD_{a,t}^0 f(t) = f(t), \quad {}_rD_{a,t}^n f(t) = f^{(n)}(t), n \in N.$$

${}_cD_{0t}^\alpha u(x, t)$ является производной Капуто порядка $\alpha, 2 < \alpha < 3, \gamma(t)$

$${}_cD_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \int_0^t \frac{u_{\tau^3}(x, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha-2}} d\tau \quad (12)$$

Из определений следует, что для существования производной функции $f(t)$ в смысле Римана-Лиувилля (1) достаточно, чтобы $f(t)$ принадлежала классу суммируемых функций, для существования производной в смысле Капуто (6) достаточно, чтобы $n-1$ -я производная функции $f(t)$ была абсолютно непрерывной функцией, где $n-1$ – целая часть порядка производной, т.е. $f(t) \in AC^n[a, b]$ и для этих производных имеет место следующая формула соотношения

$${}_cD_{a,t}^\beta f(t) = {}_rD_{a,t}^\beta \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]$$

Поэтому мы предполагаем, что решение $u(x, t)$ принадлежит классу

$$u(x, t) \in AC^n(t \in [0, T]). \quad (13)$$

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы.

В работе рассмотрены семь краевых задач с нагруженным слагаемым в виде дробной производной или интеграла и дробным оператором в самом уравнении. Показано, что единственность решения задачи зависит от вида нагруженного слагаемого. Решения некоторых задач получены в явном виде.

Современное состояние темы и актуальность.

В современной математике и прикладных науках растёт интерес к моделям, описывающим процессы с памятью, наследственностью, фрактальными структурами и крупномасштабными неоднородностями. Такие явления часто невозможно адекватно описать с помощью классических дифференциальных уравнений целочисленного порядка. В связи с этим дифференциальные уравнения дробного порядка приобрели особую популярность в последние десятилетия, предоставляя более гибкий инструмент для моделирования сложных систем, особенно в условиях нелинейности, запаздывания и нестационарности среды.

В монографии [2] А.М. Нахушев дал подробную библиографию по нагруженным уравнениям, включающую различные приложения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошной среды с памятью. Также рассматривались математические модели нелокальных физических и биологических фрактальных процессов, основанные на нагруженных дифференциальных уравнениях с дробными частными производными [3]. В [4, 5] рассматривается краевая задача для дробно нагруженного одномерного уравнения теплопроводности. Нагрузка движется с переменной скоростью. Устанавливаются условия однозначной разрешимости краевой задачи в зависимости от порядка дробной производной.

Дробные диффузионно-волновые уравнения широко применяются в различных областях науки и техники. В работах [6, 7] Mainardi et al. исследовали дробное волновое уравнение, описывающее распространение механических диффузионных волн в вязкоупругих средах. Псху и Рехвиашвили рассматривают дробное диффузионно-волновое уравнение, применяемое в электродинамике [8]. В работе [9] Javed and Malik рассматривают диффузионно-волновое уравнение с многочленными дробными производными Хильфера (ДПХ) по времени и ультрагиперболическим оператором (УГО) по пространству. В работе [10] Шитикова представляет обзор недавних исследований по применению дробного исчисления к линейным моделям вязкоупругости, используемым в задачах динамической механики твёрдого тела. Для решения этих уравнений существуют различные методы решения: метод функций Грина [11], метод конечного синусного преобразования [12], метод разделения переменных [13], метод конечных разностей [14], метод разложения Адомиана (ADM) [15] и схема конечных разностей [16]. Недавно Kasemi and Rostami [17] предложили новый

локальный разрывный метод Галеркина для уравнения диффузионной волны дробного времени. Уравнение было решено путём определения разрывного конечного элемента l -й степени с интерполированными коэффициентами.

В [18, 19] рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности в конусе в пространствах Лебега и Соболева. Краевая задача сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, и метод последовательных приближений к ней неприменим [18]. Этот факт следует из свойства несжимаемости интегрального оператора [20, 21]. В результате возникают ненулевые решения однородного уравнения [22, 23]. Сингулярные интегральные операторы, заданные в ограниченной области плоскости годографа, рассматриваются в [24].

Подробное описание применения дробного исчисления в различных областях науки и техники на современном этапе представлено в монографии [25]. Исследования различных прямых и обратных краевых задач для уравнений в частных производных, а также изучение свойств специальных функций и операторов дробного интегро-дифференцирования и их обобщений ведутся в крупных научных центрах и вузах мира. Краевые задачи с пространственными дробными интегралами также представляют интерес для настоящего исследования и планируются к дальнейшему исследованию. С прикладной точки зрения, например, актуальны работы авторов [26, 27].

С математической точки зрения, актуальным является исследование краевых задач для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой, когда нагруженный член представлен в виде дробной производной или дробного интеграла. В работах [28, 29] нагрузка перемещается с постоянной скоростью, а именно вдоль линии $x = t$. При этом нагруженный член содержит дробную производную в смысле Римана — Лиувилля. Краевая задача в указанных работах сведена к интегральному уравнению Вольтерры, ядро которого выражается через обобщённый гипергеометрический ряд. Данное интегральное уравнение обладает непустым спектром при некоторых значениях порядка дробной производной и спектрального параметра. Следует также отметить, что краевые задачи теплопроводности и возникающие при их исследовании интегральные уравнения Вольтерры с особенностями в ядре, аналогичными особенностям в пятой задаче диссертации, рассматривались в [18, 19].

Краевые задачи для нагруженных дифференциальных операторов можно интерпретировать как функционально-дифференциальный оператор вида: $Lu + \gamma Mu = f$, где L – дифференциальная часть, а M – нагруженная часть. Нагруженный член в уравнении рассматривается как возмущение [30]. Более того, он содержит след некоторых операций из искомого решения u . Если нагруженный член содержит след дробной производной искомой функции, то мы имеем дело с нелокальностью, то есть текущее состояние системы зависит от её предыстории, но эта зависимость выражается через интеграл от прошлых значений функции. В [31-34] областью определения искомой функции является первый квадрант. В этих работах показано, что существование и единственность решений дробно-нагруженных краевых задач в некоторых функциональных

классах зависят от порядка дробной производной в нагруженном члене. Кроме того, показано, что для краевой задачи с нагрузкой по пространственной переменной при определённых значениях порядка дробной производной реализуется спектральный случай: полученное интегральное уравнение Вольтерры имеет собственную функцию. Аналогичные интегральные уравнения Вольтерры возникают также при исследовании краевых задач в вырождающихся областях [35, 36].

В настоящее время активно изучаются нагруженные дифференциальные уравнения, в том числе параболические, а также дробные уравнения диффузии и диффузионно-волновые уравнения. В этой связи отметим работы, отражающие многообразие проблем и подходов в этой научной области [37-47].

В диссертации проведено систематическое исследование пересечения и сочетания этих двух современных направлений: дробные дифференциальные уравнения и нагруженные дифференциальные уравнения. Работа представляет собой комплексную исследовательскую программу, которая решает семь различных краевых задач (КЗ). Эти задачи методически объединяют:

- классические уравнения теплопроводности, содержащие нагруженное слагаемое в виде дробной производной или дробного интеграла;
- уравнения диффузии дробного порядка с нагруженным членом;
- уравнения, в которых нагруженное слагаемое представляет собой дробную производную как по временной, так и по пространственной переменной.
- уравнения, как одномерные, так и многомерные по пространственной переменной.

В работе сделан акцент на «нагруженной» природе дробных операторов: в качестве нагрузки рассматривается дробный оператор (интеграл или производная) самого решения, вычисленного в конкретной точке или на определенной кривой. Этот факт делает рассматриваемую задачу нелокальной и значительно более сложной, чем стандартное дробное уравнение в частных производных.

Также проводится анализ того, действует ли нагруженное слагаемое как «слабое» или «сильное» возмущение. Что подразумевается под этими терминами? Слабое возмущение: решение задачи единственно и ведет себя аналогично задаче без нагруженного слагаемого. Сильное возмущение: нагруженное слагаемое фундаментально меняет задачу, приводя к неединственности решения задачи и существованию нетривиальных решений однородной задачи. Это даёт важное качественное понимание корректности задач для нагруженных дифференциальных уравнений, а именно, выявление «спектрального случая»: степенной коэффициент в нагруженном слагаемом приводит к спектру собственных значений. В работе рассматриваются не только простые цилиндрические области. Первая задача рассматривается в нецилиндрической области (конусе), что увеличивает геометрическую сложность.

Результаты исследований «слабых и сильных возмущений» и «спектрального случая» имеют первостепенное значение для прикладных учёных. Они служат предупреждением: включение нагруженного слагаемого в модель не является нейтральным действием. В зависимости от порядка дробного оператора и природы коэффициента, это может привести к неединственности, что имеет серьёзные последствия для предсказуемости и устойчивости модели.

В последней, седьмой, задаче диссертационной работы целью работы было решение задачи Коши для многомерного нагруженного уравнения. Задача сводится к интегральному уравнению. В терминах его решения строятся решения рассматриваемой задачи. Приводятся достаточные условия на параметры, обеспечивающие существование и единственность решения.

Интересной особенностью седьмой задачи является то, что нарушение некоторых из указанных условий приводит к неединственности решения. Рассматривая коэффициент λ как спектральный параметр, обнаружено, что однородная задача Коши при некоторых значениях параметра μ имеет нетривиальное решение, то есть в этом смысле спектр этой задачи непуст.

Основная цель работы и научная новизна.

Основная цель исследования – это постановка и решение краевых задач для нагруженного уравнения это постановка и решение краевых задач для нагруженных уравнений, содержащих оператор дробного интегро-дифференцирования; установление условий существования и единственности их решений.

Задачи исследования:

1. Сформулировать краевые задачи (всего семь) для нагруженных уравнений и/или уравнений дробного порядка, рассматривая различные типы дробных операторов (Римана-Лиувилля, Капуто), пространственные размерности и геометрии областей (включая нецилиндрические области).

2. Свести задачи к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям и получить точные решения для некоторых полученных интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, представив их в замкнутом виде с помощью специальных функций дробного исчисления.

3. Для других поставленных задач произвести оценку ядра возникающих интегральных уравнений на основе асимптотического поведения специальных функций.

4. Провести качественный анализ задач, классифицируя нагруженные слагаемые как слабые или сильные возмущения в зависимости от их влияния на единственность решения, выявить и проанализировать критический «спектральный случай», при котором задача имеет неединственное решение, и найти соответствующую собственную функцию однородной задачи.

5. Сформулировать и доказать теоремы о существовании и единственности решений граничных задач при определенных условиях на начальные данные и параметры нагруженного слагаемого.

Объект исследования: краевые задачи и задача Коши для уравнений в частных производных дробного порядка.

Методика исследования: В работе применяются методы общей теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и дробного исчисления, а также методы интегральных преобразований и элементы теории сингулярных интегральных уравнений.

Предмет исследования: разрешимость и структура решений краевых задач, уравнения которых «нагружены» нелокальными членами, зависящими от самого решения.

Научная новизна.

Ранее были проведены исследования краевых задач для дробно-нагруженного одномерного уравнения теплопроводности в случае, когда нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной, порядок которой меньше порядка самого уравнения [31- 34].

В настоящей работе поставлены и изучены новые типы краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в которых нагруженные слагаемые включают: дробный интеграл, дробные производные как по временной, так и по пространственной переменной, произведения со степенным коэффициентом. Точки нагрузки движутся как по кривой (в одномерном случае), так и по поверхности (в двумерном, в многомерном случае). Установлено, что нагруженное слагаемое может выступать в роли: слабого возмущения, сохраняющего единственность решения (типично для дробных интегралов или производных низкого порядка); сильного возмущения, приводящего к неединственности и существованию нетривиальных решений однородной задачи (типично для дробных производных высокого порядка). Кроме того, обнаружен «спектральный случай» для задач со степенным коэффициентом в нагруженном слагаемом. Доказано, что при показателе μ , равном разности порядков производных в уравнении и нагруженном слагаемом ($\mu = \beta - \alpha$), однородная задача приобретает спектр и обладает бесконечным множеством нетривиальных решений.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Работа носит теоретический характер. Она вносит вклад в современную теорию краевых задач для уравнений в частных производных (УЧП), рассматривая класс уравнений с двумя различными характеристиками: дробным оператором в главной части уравнения и/или в нагруженном слагаемом уравнения задачи. Она выходит за рамки классической теории УЧП и переходит к нелокальным задачам, где поведение уравнения в точке зависит от поведения решения во всей области определения или в конкретных точках/моментах времени. Поэтому теоретическая ценность работы заключается в развитии теории нелокальных задач. Ключевым теоретическим открытием является установление прямой связи между типом нагруженного слагаемого (например, дробная производная или дробный интеграл) и фундаментальным свойством единственности решения. Это даёт ключевой критерий для классификации таких задач и исследования их корректности.

Результаты актуальны для различных областей, включая дробную вязкоупругость, термодинамику сред с памятью, динамику популяций с

нелокальным взаимодействием и финансовую математику с эффектами наследственности.

Положения, выносимые на защиту.

1. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с дробным оператором в главной части и/или нагруженным слагаемым в виде дробной производной или интеграла как отдельного класса нелокальных задач, свойства которых не сводятся к свойствам классических уравнений в частных производных.

2. Сведение поставленных краевых задач к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям и их исследование.

3. Построение решений интегральных уравнений в явном виде и/или оценка их ядер на основе асимптотического поведения специальных функций

4. Разрешимость поставленных граничных задач в зависимости от конкретного вида нагруженного слагаемого.

5. Нахождение собственной функции для задачи со степенным коэффициентом в нагруженном слагаемом.

Достоверность и обоснованность.

Конструктивность использованных в работе методов обеспечивает достоверность и обоснованность исследования. Общие выводы сформулированы в виде теорем и приведены их доказательства.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены в виде докладов на следующих международных конференциях:

- 20–23 сентября 2023 года приняла участие на VII Всемирном Конгрессе Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023), организованное Математическим обществом тюркского мира (Turkic World Mathematical Society, TWMS). Тезис на тему «Solving an initial boundary value problem for a loaded fractional-order diffusion equation» был опубликован в сборнике материалов конференции;

- 4-8 декабря 2023 года приняла участие на VII Международной научной Конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (B&NAK 2023) в Кабардино-Балкарской Республике (Нальчик – Эльбрус). Тезис на тему «Boundary value problem for a fractional diffusion equation with a fractional load» был опубликован в сборнике материалов конференции [53];

- 1–2 апреля 2024 года выступила с докладом на международной конференции «Математика в созвездии наук», посвящённой 85-летию со дня рождения академика РАН Виктора Антоновича Садовниченко. Тема доклада: «BVP for the time-fractional wave equation»;

- 16–19 апреля 2024 года приняла участие в Традиционной международной апрельской математической конференции, проходящей в Алматы. Тезис на тему «Boundary value problem with a load in the form of a fractional integral» был опубликован в сборнике материалов конференции;

- 1-4 апреля 2025 года приняла участие на Традиционной международной апрельской математической конференции, которая проходит в Алматы. Тезис на

тему «On the solution of a BVP for an equation with fractional derivative» был опубликован в сборнике материалов конференции;

- 21-25 июля 2025 года выступала с докладом на тему «On the solution of a BVP for an equation with a fractional derivative» на ISAAC конгрессе в Астане.

Публикации. По основным результатам диссертации опубликовано 13 работ:

Публикации в журналах, входящих в базу данных Scopus:

1. BVP with a Load in the Form of a Fractional Integral // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2024. – №1-12 (Scopus 74%, CiteScore 2.4, 2024).

2. Cauchy Problem for a Loaded Fractional Diffusion Equation // Lobachevskii Journal of Mathematic. – 2024. – №45(9). – P. 4574-4581 (Scopus 57%, CiteScore 1.5).

3. On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2022. – №4(108). – P. 98-106 (Scopus 53%, CiteScore 1.4) [64].

4. A fractionally loaded boundary value problem two-dimensional in the spatial variable // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – №2(110). – P. 72-83 (Scopus 53%, CiteScore 1.4) [64].

Публикации в материалах международных конференций:

1. Solving an initial boundary value problem for a loaded fractional-order diffusion equation // VII Всемирный Конгресс Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023), организованное Математическим обществом тюркского мира (Turkic World Mathematical Society, TWMS): тезисы докладов (Туркестан, 20-23 сентября 2023.- P.86).

2. Boundary value problem for a fractional diffusion equation with a fractional load // VII Международная научная Конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (B&NAK 2023): тезисы докладов (Кабардино-Балкарская Республика, Нальчик – Эльбрус, 4-8 декабря 2023 года). P. 351-352.

3. On the solution of a BVP for an equation with fractional Derivative // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки республики Казахстан: тезисы докладов (Алматы [64], 2025. - С. 159-160).

4. Жүктелген шеттік есеп туралы // Artificial Intelligence and Inverse Problems in Science, Technology and Industry: Proceedings (Астана, 14-16 апреля 2025. - P. 35-36).

5. On the solution of a BVP for an equation with a fractional derivative // 15-th ISAAC Congress: Abstract book (Астана, 2025. - P. 100-111).

6. Solving the Dirichlet problem for a fractional order equation // The 10th International Conference on Differential and Functional Differential Equations dedicated to the memory of academician S.P. Novikov: Abstracts (Moscow, 2025, 17-24 August. - P. 76-77).

7. On the solvability of a boundary value problem with a fractional derivative // Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization: book of abstracts of International Summer School & Conference (Almaty, 2024. - P. 24-25).

8. Solving a boundary value problem for an equation with a fractional derivative and a load in the form of a fractional integral // Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024: abstracts of the IX international scientific conference [59], dedicated to the 630th anniversary of the birth of Mirzo Ulugbek (Tashkent, 2024. - P. 168-169).

9. Жүгі бөлшектік интеграл түрінде берілген жылуөткізгіштік есебінің шешімі жайлы // Академик Е.А.Бөкетовтің 100 жылдығына орай ұйымдастырылған «Пәнаралық ғылыми зерттеулердің өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы. (Қарағанды, 2025. – Б.85-88).

По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них 4 статьи опубликованы в журналах, входящих в список Scopus [48-51], 9 работ опубликованы в сборниках трудов международных научных конференций [52-60].

Структура диссертации. Диссертация объемом 74 страниц состоит из следующих структурных элементов: обозначения, введение, два раздела, заключение и список литературы.

Краткое содержание работы.

Введение содержит оценку современного состояния теории краевых задач для дробного-нагруженного уравнения теплопроводности или уравнения с дробным интегралом/производной. Во введении обозначены актуальность и новизна темы, приведены цели, объект и предмет, задачи исследования, отражены методологическая база и положения, выносимые на защиту.

Первый раздел посвящен исследованию дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, с нагруженным слагаемым, содержащим производную или интеграл дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. В первых двух задачах порядок дробной производной или интеграла ниже, чем порядок дифференциального уравнения [61]. В этих случаях рассматривались три краевые задачи, в двух из которых были получены единственные решения поставленной задачи, и в одном [62] случае поставленная задача сведена к интегральному уравнению со специальной функцией в ядре. Для каждой задачи приведена постановка, область определения, и определен функциональный класс искомой функции. Для каждой задачи сформулированы теоремы, которые строго доказаны. В некоторых случаях решение было получено в явном виде (в случае двумерного уравнения теплопроводности, т.е. в первой задаче), и в некоторых случаях решение было получено в виде свертки определённых функций [59] и входных данных.

В первом разделе рассмотрено три задачи.

Постановка первой задачи:

Рассмотрим в нецилиндрической области

$$G = \{(x, y; t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < t; t > 0\}$$

краевую задачу, двумерную по пространственной переменной, для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 \Delta u + \lambda D_{0t}^\beta u(x, y; t) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=\frac{t}{2}} + \Phi(x, y; t) \quad (1)$$

с условием ограниченности решения:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} u(x, y; t) = 0 \quad (2)$$

и с условием на боковой поверхности конуса:

$$u(x, y; t) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(t) \quad (3)$$

где λ - комплексный параметр;

$D_{0t}^\beta u(x, y; t)$ - производная Римана-Лиувилля порядка β , $0 < \beta < 1$. В случае отсутствия осевой симметрии в области G , решением задачи (1)-(2) является функция:

$$u(x, y, t) = g(0)E_{1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t E_{1-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau + f(r, t),$$

где $f_1(t)$ и $f(r, t)$ определяются формулами:

$$f_1(t) = D_{0t}^\beta f(r, t) \Big|_{r=\frac{t}{2}}$$

$$f(r, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(\xi, r, t-\tau)F(\xi, \tau)d\xi d\tau$$

Непосредственной проверкой было показано, что решение удовлетворяет уравнению и условиям поставленной задачи.

Постановка второй задачи:

В области $Q = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$ мы рассматриваем краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda I_{0x}^\beta u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \quad (5)$$

где λ - комплексный параметр [58],

$$I_{0x}^{\beta} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x - \xi)^{1-\beta}} d\xi \quad [58]$$

где - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка β , $0 < \beta < 1$;

$\gamma(t)$ - непрерывно возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$ или $\gamma(t)$ - положительная const [58].

Так мы предполагаем, что решение $u(x, t)$ принадлежит классу [58]

$$u(x, t) \in L_1(x \geq 0) \quad [58] \quad (6)$$

Правая часть уравнения [58] краевой задачи исчезает при $t < 0$ и принадлежит классу [58]

$$f(x, t) \in L_{\infty}(A) \cap C(B) \quad (7)$$

где $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$, $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$, $T - \text{const} > 0$.

Мы также предположим, что

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \in L_1(x \geq 0) \quad (8)$$

Эти классы определяются из естественного требования существования и сходимости несобственных интегралов, возникающих при исследовании задачи. [58]

Данная задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [58]:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_{\beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) \quad (9)$$

где

$$K_{\beta}(t, \tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right)$$

и

$$f_2(t) = I_{0x}^{\beta} f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \quad (10)$$

Здесь ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$ - обобщенный гипергеометрический ряд, сходящийся для всех конечных значений z . Далее интегральное уравнение было исследовано на непрерывность по порядку дробного интеграла на интервале изменения порядка $0 < \beta < 1$.

В результате была доказаны следующие теоремы:

Теорема. Интегральное уравнение (9) однозначно разрешимо в классе функций $C([0; T])$ для правой части $f_2(t) \in C([0; T])$, определяемой формулой (10), если $\gamma(t) \sim t^\omega$ (вблизи точки [58] $t = 0$), $\omega > 0$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

Так, решение задачи (4) -(5) можно переписать в виде:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (11)$$

Теорема. Пусть для функции $f(x, t)$ выполнены условия (7) и (8), функция $\mu(t) \in C([0; T])$ является решением интегрального уравнения (9) с правой частью $f_2(t) \in C([0; T])$, определяемой формулой (10). Тогда краевая задача (4)-(5) имеет единственное решение (11) в классе

$$U = \left\{ u \mid (x\sqrt{t})^{-1}u \in L_\infty(A) \cap C(B); u_t - u_{xx} \in L_\infty(A) \cap C(B); \left. \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x - \xi)^{1-\beta}} d\xi \right\} \right|_{x=\gamma(t)} \in C([0; T]), T = \text{const} > 0, 0 \leq \beta \leq 1 \right\}$$

где $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$, $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$, $T = \text{const} > 0$, если $\gamma(t) \sim t^\omega$ (вблизи точки $t = 0$), $\omega \geq 0$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

Постановка третьей задачи:

В области $Q = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$ мы рассматриваем краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \} |_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \quad (18)$$

$$u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \quad (19)$$

где λ - комплексный параметр, ${}_c D_{0t}^\alpha u(x, t)$ является производной Капуто порядка α , $2 < \alpha < 3$, $\gamma(t)$ является непрерывной возрастающей функцией, $\gamma(0) = 0$ или $\gamma(t)$ является положительной const.

Задача сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка.

Тогда решение задачи существует, единственно и имеет вид:

$$\mu(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f_2(s) (t - s)^{\alpha-2} E_{\alpha-1, \alpha-1} \left(-\frac{1}{\lambda} (t - s)^{\alpha-1} \right) ds.$$

Здесь

$$f_2(t) = \{ {}_c D_{0t}^\alpha f_1(x, t) \} |_{x=\gamma(t)},$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Для изучения вопроса о единственности решения задачи была рассмотрена однородная задача, т.е. где $(x, t) \equiv 0$.

Таким образом, для любых $C \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. функция

$$u(x, t) = C t E_{\alpha-1,2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right)$$

является нетривиальным решением однородной задачи. Следовательно, решение третьей задачи для любого $\lambda \neq 0$ не является единственным.

Второй раздел посвящен исследованию краевых задач для дробно-нагруженного уравнения диффузии и для уравнения с порядком дробной производной большей, чем порядок дифференциального уравнения. В этих случаях решение содержало специальную функцию. В основном, решения в этом разделе были неединственны. Рассмотрены четыре задачи.

Постановка четвертой задачи:

В области

$$\Omega = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty; t > 0\}$$

найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha} u = u_{xx} + \lambda D_{0t}^{\beta} u \Big|_{x=\gamma(t)} + f(x, t) \quad (12)$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u = 0; \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2} u = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0; \alpha \in (1; 2); \beta \in (0; 1) \quad (13)$$

где $D_{0t}^{\nu} f(t) = 0$ дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\nu \in R$ (для $\nu \leq 0$, $D_{0t}^{\nu} f(t)$ является дробным интегралом Римана-Лиувилля) [60];

λ - комплексный параметр; $\gamma(t)$ неотрицательная, возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$ [60].

Краевую задачу мы свели к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [60] и нашли решение в виде свертки, тем самым доказали следующую теорему:

Теорема. Пусть $\alpha \in (1; 2); \beta \in (0; 1), t^{1-\beta} f(x, t) \in C(\omega)$. Тогда существует единственное решение уравнения (12) в области Ω , удовлетворяющее условию [58] (13) и имеющее следующее представление:

$$u(x, t) = \lambda \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) * f_2(t) + f_1(x, t) \quad (14)$$

где $f_2(t)$ и $f_1(x, t)$ определяются формулами

$$f_2(t) = D_{0t}^\beta f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \text{ и}$$

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -r - \xi(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Замечание. В соответствии с условиями теоремы задача (12)-(13) имеет единственное решение, определяемое формулой (14). Следовательно, нагруженный член является слабым возмущением при $\beta \in (0; 1)$.

Постановка пятой задачи:

В области

$$\Omega = \{(x, t) \mid -\infty \leq x \leq +\infty; t > 0\}$$

найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^\alpha u = u_{xx} + \lambda D_{0x}^\beta u \Big|_{x=\gamma(t)} + f(x, t) \quad (15)$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u = 0; \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2} u = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0; \alpha \in (1; 2); \beta \in (0; 1) \quad (16)$$

где $D_{0y}^\nu f(y)$ - дробная производная типа Римана-Лиувилля порядка $\nu \in R$ (в случае $\nu \leq 0$, то $D_{0y}^\nu f(y)$ -она становится типом интеграла Римана-Лиувилля);

λ - некоторый комплексный параметр;

$\gamma(t)$ -неотрицательная, возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Задача также сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для этого интегрального уравнения доказана следующая лемма.

Лемма. Интегральное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{\alpha, \beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t)$$

с ядром

$$K_{\alpha, \beta}(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)(\gamma(t))^\beta} \quad (17)$$

при $0 \leq \beta \leq 1; 1 \leq \alpha \leq 2$ и с $\gamma(t) \sim t^w$ в окрестности точки $t = 0$ однозначно разрешено в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части $f_2(t)$, если $0 < w \leq \frac{1}{\beta}$.

Также доказана следующая теорема:

Теорема. Пусть $x^{2-\alpha} f(x, t) \in C(\Omega)$. Тогда функция, определяемая формулой

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \mu(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -x - \xi(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

является решением краевой задачи (15)-(16), здесь $\mu(t)$ -решение интегрального уравнения (16) с правой частью $f_2(t)$, определяемой формулами:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= D_{0x}^{\beta} u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)}, \beta \in (0; 1) \\ f_2(t) &= D_{0x}^{\beta} f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \end{aligned}$$

Далее рассмотрен спектральный случай для решения и доказана следующая теорема:

Теорема. В случае $\gamma(t) = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$, число

$$\lambda = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\nu+1+\alpha)}{\lambda\Gamma(\nu+1)}, \nu > -1, \beta \in (0; 1); \alpha \in (-1; 2)$$

является характеристическим числом интегрального уравнения (16) с ядром (17). Функция $\mu(t) = t^{\nu}$; $\nu \in R$ является соответствующей собственной функцией в случае $\gamma(t) = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Постановка шестой задачи:

В области

$$G = \{(x, y; t) \mid -\infty < x, y < +\infty, t > 0\}$$

найти решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha} u = u_{xx} + u_{yy} + \lambda \left\{ D_{0t}^{\beta} u \right\} \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0} + f(x, y, t) \quad (24)$$

где $D_{0t}^{\sigma} f(t)$ - производная Римана-Лиувилля порядка σ , $0 < \sigma < 1$ и $0 < \beta \leq \alpha < 1$.

Решение уравнения (24) должно удовлетворять начальному условию:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u &= \varphi(x, y), \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Сведением к интегральному уравнению, доказана следующая теорема.

Теорема. Функция

$$u(x, y, t) = \lambda \left(\psi(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) (t) + \lambda^2 \left(\psi(t) * \left(t^{2\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, 2\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \right) (t) + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)$$

является решением задачи (24)-(25), где функции $\varphi_1(x, y, t)$ и $f_1(x, y, t)$ определяются начальной функцией $\varphi(x, y)$ из условия (25) и правой частью $f(x, y, t)$ из уравнения (24) соответственно. $E_{a,b}(z)$ является функцией Миттаг-Леффлера и

$$\psi(t) = D_{0t}^{\beta} (\varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)) \Big|_{x=1=t, y=1=t, t>0}$$

Постановка седьмой задачи:

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = \lambda y^{\mu} \left[D_{0y}^{\beta} u(x, y) \right]_{x=z(y)} + f(x, y) \quad (26)$$

где D_{0y}^{γ} обозначает дробную производную Римана-Лиувилля (или интеграл) порядка γ по y с началом в точке $y = 0$ [27,36]; $z(y): (0, T) \rightarrow R^n$; $0 < \alpha < 1, \beta < \alpha$; $\mu \in R$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; и

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Δ_x — оператор Лапласа относительно x .

Была доказана лемма.

Лемма. Пусть $u(x, y)$ - регулярное решение задачи (26), и мы предположим, что

$$y^{1-\varepsilon} v(y) \in C[0, T] \text{ for some } \varepsilon + \mu > 0 \quad (27)$$

$u(x, y)$ удовлетворяет условию Тихонова

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\delta} u(x, y) \exp\left(-\sigma |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \text{ for some } \sigma > 0 \quad (28)$$

и $\tau(x)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tau(x) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \quad (29)$$

и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\delta} f(x, y) \exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \quad (30)$$

для некоторого $\rho < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{2T}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$.

Тогда функция $v(y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(y) = v_0(y) + \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} [y^\mu v(y)] \quad (31)$$

где

$$v_0(y) = \left[D_{0y}^\beta u_0(x, y) \right]_{x=z(y)} \quad (32)$$

Лемма. Пусть $\tau(x) \in C(R^n)$; $y^{1-\delta} f(x, y) \in C(\Omega_0)$ для некоторого $\delta > 0$; пусть $y^{1-\delta} f(x, y)$ будет непрерывным по Гёльдеру относительно x ; и пусть (29), (30) и $z(y) \in C(0, T)$ и $\sup_{(0, T)} |z(y)| < \infty$ условия выполнены. Тогда

$$y^{1-\alpha+\beta} v_0(y) \in C[0, T] \quad (33)$$

где функция $v_0(y)$ определяется как (32).

Лемма. Пусть $\nu > 0$, $y^{1-\varepsilon} h(y) \in C[0, T]$, $\mu + \varepsilon > 0$, и $\mu + \nu > 0$. Тогда

$$\left| (D_{0y}^{-\nu} y^\mu)^m h(y) \right| \leq C \frac{y^{m(\mu+\nu)+\varepsilon-1}}{\nu^{m\nu} (m!)^\nu} h^*(y) \quad (34)$$

где $C = C(\varepsilon, \mu, \nu)$ и

$$h^*(y) = \sup_{0 < t < y} t^{1-\varepsilon} |h(t)| \quad (35)$$

Лемма. Пусть $\mu + \alpha - \beta > 0$. Интегральное уравнение (31) имеет единственное решение в классе функций из класса (27). Решение имеет вид

$$v(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^k v_0(y) \quad (36)$$

и удовлетворяет включению

$$y^{1-\alpha+\beta} v(y) \in C[0, T].$$

Теорема. Пусть $\tau(x) \in C(R^n)$; $y^{1-\delta} f(x, y) \in C(\Omega_0)$ для некоторого $\delta > 0$; пусть $y^{1-\delta} f(x, y)$ будет непрерывным по Гёльдеру относительно x ; и пусть (29), (30) и $z(y) \in C(0, T)$ и $\sup_{(0, T)} |z(y)| < \infty$ выполняются; и

$$\mu > \beta - \alpha \quad (37)$$

Тогда существует решение задачи (26). Решение имеет вид

$$u(x, y) = \int_{R^n} \tau(s) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y) ds + \\ + \int_0^y \int_{R^n} [f(s, t) + \lambda t^\mu v(t)] \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y - t) ds dt$$

где функция $v(y)$ является решением интегрального уравнения (31) и задается выражением

$$v(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^k v_0(y)$$

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$z(y) \in C(0, T) \text{ and } \sup_{(0, T)} |z(y)| < \infty$$

и (37). Существует не более одного регулярного решения задачи (24) и (25) в классе функций, удовлетворяющих (30).

Автор выражает глубокую благодарность и признательность зарубежному консультанту д.ф.-м.н., профессору Псху Арсен Владимировичу, отечественному научному руководителю, PhD., профессору Космаковой Минзиле Тимербаевне за ценные советы и консультации.

1 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1 Краевая задача в конусообразной области

Рассмотрим в нецилиндрической области

$$G = \{(x, y; t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < t; t > 0\}$$

краевую задачу, двумерную по пространственной переменной, для дробнонагруженного уравнения теплопроводности [60]:

$$u_t = a^2 \Delta u + \lambda D_{0t}^\beta u(x, y; t) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=\frac{t}{2}} + \Phi(x, y; t) \quad (1.1.1)$$

с условием ограниченности решения:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} u(x, y; t) = 0; \quad (1.1.2)$$

и с условием на боковой поверхности конуса:

$$u(x, y; t) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(t) \quad (1.1.3)$$

где λ - комплексный параметр, $D_{0t}^\beta u(x, y; t)$ - производная Римана-Лиувилля порядка β , $0 < \beta < 1$.

Рассмотрим краевую задачу (1.1.1) теплопроводности в полярных координатах:

$$x = r \cos \phi; y = r \sin \phi; 0 \leq \phi < 2\pi; r \geq 0$$

Задача (1.1.1)-(1.1.3) исследуется в случае свойства изотропности по угловой координате ϕ (случай осевой симметрии). Тогда можно перейти к задаче в полярных координатах.

В области $\Omega_\infty = \{(r, t) \mid r > t; t > 0\}$ найти решение уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \right) + \lambda \left\{ D_{0t}^\beta w(x, y; t) \right\} \Big|_{r=\frac{t}{2}} + F(r, t) \quad (1.1.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w(r, t) = 0 \quad (1.1.5)$$

$$w(r, t) \Big|_{r=t} = g(t) \quad (1.1.6)$$

где $w(r, t) = u(r \cos \phi, r \sin \phi; t)$ – неизвестная функция. Заметим, что выполняется условие согласования в вершине конуса:

$$w|_{r=0} = w|_{t=0} = g(0).$$

Как известно, [2] функция

$$G(r, \xi, t) = \frac{\xi}{2a^2 t} \exp \left\{ -\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2 t} \right\} I_0 \left(\frac{r\xi}{2a^2 t} \right) \quad (1.1.7)$$

является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя [12]. Из [2] имеем что в области $\Omega_\infty = \{(r, t) \mid 0 < r < +\infty; t > 0\}$ решением неоднородной задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + F(r, t), \quad w|_{t=0} = w_0(r),$$

является функция

$$w(r, t) = \int_0^\infty G(r, \xi, t) w_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(r, \xi, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (1.1.8)$$

Поскольку $w(r, t) \equiv u(r \cos \phi, r \sin \phi; t)$ – не зависит от ϕ , в силу изотропности рассматриваемой задачи, а областью является конус с вершиной в начале координат, из (1.1.3) имеем

$$u(x, y; t)|_{\sqrt{x^2 + y^2} = t} = g(t), \text{ т.е. } w|_{r=t} = g(t)$$

тогда должно выполняться условие согласования в вершине конуса:

$$w(r, t)|_{t=0} = g(0) - \text{const} \quad (1.1.9)$$

Тогда решением задачи (1.1.4)-(1.1.5) является функция (в силу формулы (1.1.8):

$$w(r, t) = \int_0^\infty G(r, \xi, t) g(0) d\xi + \lambda \int_0^t \int_0^\infty G(r, \xi, t - \tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + f(r, t) \quad (1.1.10)$$

где

$$\mu(t) = \left\{ D_{0t}^\beta w(x, y; t) \right\} \Big|_{r=\frac{t}{2}} \quad (1.1.11)$$

$$f(r, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(\xi, r, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (1.1.12)$$

Выполним с учетом (1.1.7)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} G(r, \xi, t) d\xi &= \frac{1}{2a^2t} \int_0^{+\infty} \xi \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2t}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2t}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2a^2t} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) \int_0^{+\infty} \xi \exp\left(\frac{-\xi^2}{4a^2t}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2t}\right) d\xi \end{aligned}$$

Из [31] (ф. 1.15.5 (4)) подставляем значения при $\alpha = 2; \nu = 0; c = \frac{r}{2a^2t}; \rho = \frac{1}{4a^2t}$

$$\int_0^{+\infty} G(r, \xi, t) d\xi = \frac{1}{2a^2t} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) A_\nu^{\nu+2}$$

При $\nu = 0$, имеем $A_0^2 = A_\nu^{\nu+2}$. Тогда

$$\int_0^{+\infty} G(r, \xi, t) d\xi = \frac{1}{2a^2t} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) 2a^2t \exp\left(\frac{r^2}{4a^4t^2} a^2t\right) = 1$$

Итак,

$$\int_0^{+\infty} G(r, \xi, t) d\xi = 1$$

где $G(r, \xi, t)$ имеет вид (1.1.7).

Тогда представление (1.1.10) можно переписать в виде:

$$w(r, t) = g(0) + \lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau + f(r, t) \quad (1.1.13)$$

Применив к уравнению (1.1.13) оператор дробного дифференцирования по формуле (0.0.1) и подставив $r = \frac{t}{2}$ в силу обозначения (1.1.11), слева в уравнении (1.1.13) получим функцию $\mu(t)$. Вычислим:

$$\begin{aligned}\Gamma(1-\beta)D_{0t}^{\beta}\left\{\int_0^t\mu(\tau)d\tau\right\}&=\frac{d}{dt}\int_0^t\mu(\theta)\int_{\theta}^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}d\theta= \\ &=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\mu(\theta)(t-\theta)^{1-\beta}}{1-\beta}d\theta=\int_0^t\frac{\mu(\theta)}{(t-\theta)^{\beta}}d\theta\end{aligned}$$

После вышеприведенной вычислениях, из уравнения (1.1.13) получим:

$$\mu(t)=\frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)}t^{-\beta}+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau+f_1(t)$$

где

$$f_1(t)=D_{0t}^{\beta}f(r,t)\Big|_{r=\frac{t}{2}} \quad (1.1.14)$$

таким образом, задача (1.1.4)-(1.1.5) свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\mu(t)-\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau=\frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)}t^{-\beta}+f_1(t) \quad (1.1.15)$$

где $f_1(t)$ определяется формулой (1.1.14). Рассмотрим соответствующую задачу при $\Phi(x,y;t)\equiv 0$ в уравнении (1.1.1), т.е. $F(r,t)=0$ в уравнении (1.1.4). Тогда уравнение (1.1.15) примет вид:

$$\mu(t)-\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau=\frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)}t^{-\beta} \quad (1.1.16)$$

где $f_1(t)$ определяется формулой (1.1.14).

Пусть $\Phi(s)=L[\mu(t)]$ - образ Лапласа функции $\mu(t)$. Применив к уравнению (1.1.16) интегральное преобразование Лапласа, получим: [44]

$$\Phi(s)-\frac{\lambda\Phi(s)}{s^{1-\beta}}=\frac{g(0)}{s^{1-\beta}}$$

отсюда

$$\Phi(s)=\frac{g(0)}{s^{1-\beta}-\lambda} \quad (1.1.17)$$

Применив обратное преобразование Лапласа к (1.1.17), учитывая, что [15]

$$L\left[t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^k)\right]=\frac{k!s^{2-\beta}}{(s^{\alpha}\mp a)^{k+1}}; \text{Res} > |a|$$

где $E_{a,b}(z)$ - функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + b)}$$

получим

$$\mu(t) = g(0)t^{-\beta}E_{1-\beta,1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \quad (1.1.18)$$

В силу представления (1.1.1) решение задачи (5);(10) при $F(r, t) = 0$ в области Ω_{∞} с учетом $w(r, t) = g(0) + \lambda g(0) \int_0^t \tau^{-\beta} E_{1-\beta,1-\beta}(\lambda \tau^{1-\beta}) d\tau$. Так как [15]

$$\int_0^z E_{a,b}(\lambda t^a) t^{b-1} dt = z^b E_{a,b+1}(\lambda z^a); (b > 0)$$

то

$$w(r, t) = g(0) + \lambda g(0)t^{-\beta}E_{1-\beta,2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \quad (1.1.19)$$

(1.1.19) - решение задачи (2.1.4); уравнение (2.1.9) в области Ω_{∞} , так как условие $w|_{r=t} = g(t)$ принимает вид (2.1.9). Таким образом решение задачи (2.1.1)-(2.1.3) при $\Phi(x, y; t) = 0$ в случае осевой симметрии имеет вид:

$$w(x, y; t) = g(0) + \lambda g(0)t^{-\beta}E_{1-\beta,2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \quad (1.1.20)$$

где $0 < \beta < 1$.

В силу формулы [14]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

имеем при $b = 1$ и $z = \lambda t^{1-\beta} - 1$

$$\lambda t^{1-\beta} E_{1-\beta,2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) = E_{1-\beta,1}(\lambda t^{1-\beta} - 1)$$

Тогда (1.1.20) примет вид:

$$u(x, y, t) = g(0)E_{1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \quad (1.1.21)$$

так как $E_{a,1}(z) = E_a(z)$ Непосредственной проверкой можно показать, что функция (1.1.21) удовлетворяет однородному уравнению в случае осевой симметрии.

Частный случай. Пусть $\beta = \frac{1}{2}$. В задаче (1.1.1)-(1.1.3), перепишем производную Римана-Лиувилля (0.0.1) в виде:

$${}_{RL}D_{0t}^{\frac{1}{2}}u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(x, t, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (1.1.22)$$

Пусть $u|_{t=0} = g(0)$, где $g(t) = u(x, y; t)|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(t)$ и $\Phi(x, y; t) = 0$. Тогда решение примет вид (1.1.20)

$$u(x, y, t) = g(0)E_{\frac{1}{2}}(\lambda\sqrt{t})$$

Так как [15]

$$E_{\frac{1}{2}}\left(\pm z^{\frac{1}{2}}\right) = e^z \operatorname{erfc}\left(\mp z^{\frac{1}{2}}\right)$$

то,

$$u(x, y; t) = g(0)e^{\lambda^2 t} \operatorname{erfc}(-\lambda^2 t) \quad (1.1.23)$$

где $\operatorname{erfc} z$ - дополнительный интеграл ошибок (0.0.3).

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.1.15).

Пусть $L[f_1(t)] = F_1(s)$.

Тогда в пространстве изображений Лапласа уравнение (1.1.15) примет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(s) - \frac{\lambda\Phi(s)}{s^{1-\beta}} &= \frac{g(0)}{s^{1-\beta}} + F_1(s) \\ \Phi(s) &= \frac{g(0)}{s^{1-\beta}} + \frac{F_1(s)s^{1-\beta}}{s^{1-\beta} - \lambda} \\ \Phi(s) &= \frac{g(0)}{s^{1-\beta}} + F_1(s) + \lambda \frac{F_1(s)}{s^{1-\beta} - \lambda} \end{aligned}$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\mu(t) = g(0)t^{-\beta}E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + f_1(t) + \lambda f_1(t)t^{-\beta}E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \quad (1.1.24)$$

тогда представление (1.1.13) с учетом функции (1.1.23) имеет вид:

$$\begin{aligned}
w(r, t) &= g(0) + \lambda \int_0^t \left(g(0)\tau^{-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) d\tau + f_1(\tau) \right) d\tau \\
&\quad + \lambda^2 \int_0^t \int_0^\tau f_1(\theta)(\tau - \theta)^{-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda(t - \theta)^{1-\beta}) d\theta d\tau + f(t, t) \\
&= g(0) + \lambda g(0)t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t f_1(\tau) d\tau \\
&\quad + \lambda^2 \int_0^t f_1(\theta) d\theta \int_\theta^t (\tau - \theta)^{-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda(\tau - \theta)^{1-\beta}) d\tau + f(r, t) \\
&= g(0) + \lambda g(0)t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t f_1(\tau) d\tau \\
&\quad + \lambda^2 \int_0^t f_1(\theta) I(\theta; t) d\theta + f(r, t) \tag{1.1.25}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I(\theta; t) &= \int_\theta^t (\tau - \theta)^{-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta}(\lambda(\tau - \theta)^{1-\beta}) d\tau \\
&= (t - \theta)^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda(t - \theta)^{1-\beta})
\end{aligned}$$

Тогда функцию (1.1.25) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
w(r, t) &= g(0) + \lambda g(0)t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t f_1(\tau) d\tau + \\
&\quad + \lambda^2 \int_0^t (t - \tau)^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda(t - \tau)^{1-\beta}) f_1(\tau) d\tau + f(r, t) \tag{1.1.26}
\end{aligned}$$

В силу формулы

$$E_{a,b}(z) = z E_{a, a+b}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

имеем при $b = 1$ и $z = \lambda t^{1-\beta}$

$$\lambda t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) - 1 = E_{1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) - 1$$

Тогда (1.1.26) примет вид:

$$w(r, t) = g(0) E_{1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t E_{1-\beta}(\lambda(t - \tau))^{1-\beta} f_1(\tau) d\tau + f(r, t) \tag{1.1.27}$$

где $f_1(\tau)$ и $f(r, t)$ определяются формулами (1.1.14) и (1.1.11) соответственно.

Уравнение (1.1.27) - решение задачи в полярных координатах (1.1.4)-(1.1.5).
Итак, в случае отсутствия осевой симметрии в области G решением задачи (1.1.1)-(1.1.2) является функция:

$$u(x, y, t) = g(0)E_{1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t E_{1-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau + f(r, t)$$

где $f_1(t)$ и $f(r, t)$ определяются формулами (1.1.14) и (1.1.11) соответственно.

Непосредственной проверкой покажем, что функция (1.1.27) удовлетворяет уравнению (1.1.4). Для этого предварительно перепишем функцию (1.1.27) в виде (1.1.26). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(t^{1-\beta} E_{1-\beta; 2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \right) &= t^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) \\ \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} E_{1-\beta; 2-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau &= \\ \int_0^t \frac{d}{dt} \left[(t-\tau)^{1-\beta} E_{1-\beta; 2-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta}) \right] f_1(\tau)d\tau &= \\ \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau & \end{aligned}$$

то из (1.1.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \lambda g(0)t^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda f_1(t) + \\ &+ \lambda^2 \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau + \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

$$\frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right) \quad (1.1.29)$$

В силу обозначения (1.1.11) и равенства (1.1.24) имеем

$$\begin{aligned} D_{0t}^\beta w(r, t) \Big|_{r=\frac{t}{2}} &= \mu(t) = g(0)t^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + f_1(t) + \\ &+ \lambda \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} E_{1-\beta; 1-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta})f_1(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Подставив (1.1.28)-(1.1.30) в уравнение (1.1.4) получим:

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right) + F(r, t) \quad (1.1.31)$$

В силу обозначения (1.1.11) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^\infty G(\xi, r, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\
&= \int_0^t \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial t}(\xi, r, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^\infty G(\xi, r, 0) F(\xi, 0) d\xi \\
\frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r(r, t)) &= \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^t \int_0^\infty r G(\xi, r, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \quad (1.1.32)
\end{aligned}$$

Известно, что [43]

$$e^{-z} I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \text{ при } |\text{Arg}z| < \frac{\pi}{2} \text{ и } |z| \rightarrow \infty.$$

Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} G(\xi, r, t) = 0$. Поэтому равенство (1.1.31) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial t}(\xi, r, t - \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G(\xi, r, t - \tau)) F(\xi, \tau) d\xi d\tau + F(r, t)
\end{aligned}$$

или

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial G}{\partial t}(\xi, r, t - \tau) - \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G(\xi, r, t - \tau)) \right] F(\xi, \tau) d\xi d\tau = F(r, t) \quad (1.1.33)$$

Поскольку $G(\xi, r, t)$ - фундаментальное решение уравнения теплопроводности в полярных координатах, то:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G) = \sigma(\xi - r) \sigma(t)$$

где σ - функция Дирака.

Тогда (1.1.32) примет вид:

$$\int_0^{+\infty} \sigma(\xi - r) \sigma(t) * F(\xi, t) d\xi = F(r, t)$$

или

$$\int_0^\infty \sigma(\xi - r) F(\xi, t) d\xi = F(r, t)$$

получили верное равенство. Значит, функция (1.1.28) удовлетворяет уравнению (1.1.4). Функция (1.1.28), очевидно, удовлетворяет условию (1.1.4) в силу выбора классов для $F(r, t)$. Теперь покажем, что функция (1.1.27) удовлетворяет условию (1.1.5).

$$w(r, t)|_{t=0} = g(0) + \lim_{t \rightarrow 0} f(r, t) = g(0)$$

в силу равенства (1.1.11). Итак, функция (1.1.27) является решением задачи (1.1.4).

1.2 Сигнальная задача

В области $Q = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$ мы рассматриваем краевую задачу [48]

$$u_t - u_{xx} + \lambda I_{0x}^\beta u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \quad (1.2.1)$$

$$u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \quad (1.2.2)$$

где λ - комплексный параметр,

$$I_{0x}^\beta u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x - \xi)^{1-\beta}} d\xi$$

- дробный интеграл Римана-Лиувилля (0.0.3) порядка $\beta, 0 < \beta < 1$, $\gamma(t)$ непрерывно возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$ или $\gamma(t)$ положительная const [58].

Так мы предполагаем, что решение $u(x, t)$ принадлежит классу

$$u(x, t) \in L_1(x \geq 0) \quad (1.2.3)$$

Правая сторона краевой задачи исчезает при $t < 0$ и принадлежит классу

$$f(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B) \quad (1.2.4)$$

где $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$, $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$, $T - \text{const} > 0$.

Мы также предположим, что [48]

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \in L_1(x \geq 0) \quad (1.2.5)$$

Эти классы определяются из естественного требования существования и сходимости несобственных интегралов, возникающих при исследовании задачи. [58]

Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Лемма 1.2.1. Краевая задача (1.2.1)-(1.2.2) сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Доказательство. В силу условия (2.2.4) решение задачи [59] (1.2.1)-(1.2.2) можно представить формулой (1.2.6):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + f_1(x, t) \quad (1.2.6)$$

где

$$\mu(t) = I_{0x}^\beta u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad 0 < \beta < 1 \quad (1.2.7)$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (1.2.8)$$

Функция (1.2.8) существует и ограничена из-за условия (1.2.4) и принадлежит классу (1.2.5) по предположению.

Учитывая равенство (0.0.6), мы получаем

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t) \quad (1.2.9)$$

По предположению, функции (1.2.8) $f_1(x, t)$ функции $u(x, t)$ и удовлетворяет включениям (1.2.5) и (1.2.3). Теперь применим оператор дробного интеграла порядка $\beta, 0 < \beta < 1$ к представлению (1.2.9) относительно переменной x по формуле (0.0.3) и положим $a = 0$. Затем положим $x = \gamma(t)$. В левой части [58] получаем функцию $\mu(t)$ по формуле [58] (1.2.7).

Чтобы применить операцию дробного интегрирования порядка $\beta, 0 < \beta < 1$, к правой части равенства (1.2.9), сначала вычислим интеграл

$$I_{0x}^\beta \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) (x)$$

Так,

$$\begin{aligned} & I_{0x}^\beta \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) (x) = \\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) \frac{1}{(x-\theta)^{1-\beta}} d\theta = \\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \mu(\tau) \left(\int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) (x-\theta)^{\beta-1} d\theta \right) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \mu(\tau) J(t, \tau, x; \beta) d\tau \end{aligned}$$

Так как [31]:

$$J(t, \tau, x; \beta) = \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) (x-\theta)^{\beta-1} d\theta =$$

$$\frac{x^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} B(2, \beta) {}_3F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) =$$

$$\frac{x^{\beta+1}\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right),$$

где ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая последовательность (0.0.8) [41], тогда

$$I_{0x}^\beta \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) (x) =$$

$$\frac{x^{\beta+1}\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Тогда из представления (1.2.9) когда $x = \gamma(t)$, мы имеем

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_\beta(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) \quad (1.2.10)$$

где

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) \quad (1.2.11)$$

и

$$f_2(t) = I_{0x}^\beta f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \quad (1.2.12)$$

Здесь ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$ сходящаяся [48] обобщенная гипергеометрическая последовательность (0.0.8) для всех конечных значений z .

Краевая задача (1.2.1)-(1.2.2) сведена к интегральному уравнению [48] (1.2.10). Лемма доказана.

Исследование непрерывности по порядку дробного интеграла на интервале изменения порядка [60]

Далее мы исследуем непрерывность по [60] порядку β дробного интеграла в нагруженном члене уравнения из краевой задачи (1.2.1)-(1.2.2).

Лемма 2.2.2. Для краевой задачи (1.2.1)-(1.2.2) имеет место непрерывность по порядку дробного интеграла в нагруженном слагаемом уравнения [60].

Доказательство. Лемма доказывается проверкой предельных случаев порядка дробного интеграла в нагруженном члене уравнения (1.2.1). [60]

I. Случай при $\beta = 0$. Из (1.2.1)-(1.2.2) мы получаем краевую задачу [60] при $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) &= f(x, t), \\ u|_{x=0} &= 0; u|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

здесь

$$\mu(t) = I_{0x}^0(u(x, t))|_{x=\gamma(t)} = u(\gamma(t); t)$$

Решение задачи может быть представлена в виде:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t)$$

Применяя оператор I_{0x}^0 и заменяя $x = \gamma(t)$ мы получаем:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) \quad (1.2.13)$$

здесь

$$f_2(t) = f_1(\gamma(t), t)$$

Теперь найдем предел из ядра (1.2.11) для β , стремящегося к нулю справа:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0+0} K_\beta(t, \tau) &= \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(2)} {}_2F_2\left(1, \frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) = \\ &= \frac{\gamma(t)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right) \end{aligned}$$

Известно, что [32]

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z} \operatorname{erf}(z)$$

Значит,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+0} K_\beta(t, \tau) = \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

Отсюда заключаем, что ур. (1.2.10) совпадает с ур. (1.2.13) при $\beta = 0$.

II. Случай при $\beta = 1$. Из (1.2.1)-(1.2.2) мы получаем краевую задачу при $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) &= f(x, t), \\ u|_{x=0} &= 0; u|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

здесь

$$\mu(t) = I_{0x}^1(u(x, t))|_{x=\gamma(t)} = \int_0^{\gamma(t)} u(\theta, t) d\theta$$

Решение задачи можно представить формулой (1.2.14):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t) \quad (1.2.14)$$

Прежде чем применить операцию I_{0x}^1 и подставить $x = \gamma(t)$ в представление (1.2.14), вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} I_{0x}^1 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right\} &= \int_0^x \left(\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right) d\theta = \\ \int_0^t \mu(\tau) \left(\int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\theta \right) d\tau &= \int_0^t \frac{x^2}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Теперь, применяя операцию I_{0x}^1 и подставляя $x = \gamma(t)$ в представление (1.2.14), получаем

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \frac{\gamma^2(t)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, 2; -\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) \quad (1.2.15)$$

Предел ядра (1.2.11) при β , стремящемся к 1 слева, совпадает с ядром последнего интегрального уравнения.

Лемма доказана.

Замечание 3. Учитывая формулу [31]

$${}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, 2; -z\right) = \frac{1}{z} (\sqrt{\pi z} \operatorname{erfi}(\sqrt{z}) + 1 - e^{-z})$$

где

$$\operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erf}(ix) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$$

интегральное уравнение (1.2.15) может быть переписано в виде:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_1(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t)$$

где

$$K_1(t, \tau) = \gamma(t) \operatorname{erf} \left(\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{t-\tau}} \right) - \frac{2\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \exp \left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)} \right) \right)$$

Если $\gamma(t) \sim t^\omega$ (в окрестности точки $t = 0$), $\omega \geq 0$, тогда ядро $K_1(t, \tau)$ ограничено для всех $t \in [0; T], 0 \leq \tau \leq t$.

Оценка ядра интегрального уравнения

Ядро (1.2.11) уравнения (1.2.10) имеет особенности при $\tau = t$ и $t = 0$.

Для оценки ядра рассмотрим обобщенную гиперболическую функцию в ядре как форму интегрального представления (0.0.7) [13].

$$\int_0^u x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} \exp(cx^n) dx = B(\mu, \nu) u^{\mu+\nu-1} {}_nF_n \left(\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}, \dots, \frac{\nu+n-1}{n}; \frac{\mu+\nu}{n}, \frac{\mu+\nu+1}{n}, \dots, \frac{\mu+\nu+n-1}{n}; cu^n \right),$$

$\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0, n = 2, 3 \dots$

Подставляя значения переменных

$n = 2, \nu = 1, \mu = \beta + 1, u = \gamma(t), c = -\frac{1}{4(t-\tau)}, x = \xi$ получаем:

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^{\gamma(t)} (\gamma(t) - \xi)^\beta \exp \left(-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)} \right) d\xi.$$

Затем мы оцениваем ядро $K_\beta(t, \tau)$ при $0 \leq \beta \leq 1$:

$$\begin{aligned} |K_\beta(t, \tau)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_0^{\gamma(t)} (\gamma(t) - \xi)^\beta d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+2)\sqrt{\pi(t-\tau)}} (\gamma(t))^{\beta+1} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Далее рассмотрим связь свойств ядра с порядком дробного интеграла в нагруженном члене уравнения краевой задачи и с поведением нагрузки при малых значениях временной переменной.

Теорема 1.2.3. Интегральное уравнение (1.2.10) однозначно разрешимо в классе функций $C([0; T])$ для правой части $f_2(t) \in C([0; T])$, определяемой формулой (1.2.12), если $\gamma(t) \sim t^\omega$ (вблизи точки [58] $t = 0$), $\omega > 0$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$L_\beta(t, \tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right),$$

здесь

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{L_\beta(t, \tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

Пусть $\gamma(t) \sim t^\omega$ для $t \rightarrow 0+0$, когда $\omega \geq 0$. Тогда

$$L_\beta(t, \tau) = \frac{t^{w(\beta+1)}}{\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) \quad (1.2.17)$$

Эта функция имеет сингулярности на прямой $t - \tau = 0$. Теперь исследуем ее на непрерывность

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} L_\beta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t-0} \frac{t^{w(\beta+1)}}{\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right).$$

Введем переменную:

$$z = \frac{t^{2w}}{4(t-\tau)} \Rightarrow \tau = t - \frac{t^{2w}}{4z}$$

У нас есть три возможных случая:

- а) если $2w - 1 > 0$, то $z \rightarrow 0+0$ при $\tau \rightarrow t-0$;
- б) если $2w - 1 = 0$, то $z \rightarrow \frac{1}{4}$ при $\tau \rightarrow t-0$;
- в) если $2w - 1 < 0$, то $z \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow t-0$.

Теперь используем неравенство из теоремы (0.0.1) для следующих значений переменных:

$$p = 2, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = 1, \rho_1 = \frac{\beta+2}{2}, \rho_2 = \frac{\beta+3}{2}$$

$$z = \frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}, \theta = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)}$$

Мы получим

$$\exp\left(-\frac{2z}{(\beta+2)(\beta+3)}\right) < {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -z\right) < 1 - \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)} + \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)} \exp(-z) \quad (1.2.18)$$

Затем пересматриваются случаи для значений ω .

а) $2w - 1 > 0$ для $\tau \rightarrow t - 0, z \rightarrow 0 + 0$. Из неравенства (1.2.18) получаем

$${}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) \sim 1 \text{ for } \tau \rightarrow t - 0.$$

б) $2w - 1 = 0$. Из неравенства (1.2.18) получаем

$$\exp\left(-\frac{1}{2(\beta+2)(\beta+3)}\right) < {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) < \\ 1 - \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)} + \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)} \exp\left(-\frac{1}{4}\right)$$

или

$$\exp\left(-\frac{1}{2(\beta+2)(\beta+3)}\right) < {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) < 1.$$

в) $2w - 1 < 0$. Из неравенства (1.2.18) получаем

$$0 < {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) < 1 - \frac{2}{(\beta+2)(\beta+3)}.$$

Тогда функция (1.2.17) ограничена для любых значений $w \geq 0$ и $0 \leq \beta \leq 1$. Более того,

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} L_\beta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t-0} \frac{t^{w(\beta+1)}}{\Gamma(\beta+2)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{t^{2w}}{4(t-\tau)}\right) = 0$$

Что касается ядра (1.2.11)

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{L_\beta(t, \tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

тогда $\forall w \geq 0$ и $\beta \in [0; 1]$ ядро (1.2.11) имеет слабую особенность в области $D = \{(t, \tau) : 0 < t < T, 0 < \tau < t\}$. Этот результат согласуется с приведенным выше неравенством (1.2.16).

Интегральные уравнения со слабой особенностью можно решить методом последовательных приближений [42]. Можно показать, что для уравнения (0.0.3) последовательные итерированные ядра ограничены, начиная с некоторого порядкового номера.

Тогда

$$\int_0^T \int_0^T K_\beta^2(t, \tau) d\tau dt \leq A, \text{ const } A > 0$$

то согласно [45] имеем, что ядро $K_\beta(t, \tau)$ непрерывно в целом.

Если правая часть интегрального уравнения непрерывна на отрезке $[0, T]$, а ядро непрерывно в целом, то любое решение интегрального уравнения непрерывно на отрезке $[0, T]$ [45].

Замечание 4. При условиях теоремы 1.2.3 ядро (1.2.11) интегрального уравнения (1.2.10) имеет слабую особенность. Поэтому, применяя метод последовательных приближений, можно получить решение интегрального уравнения (1.2.10) в классе непрерывных функций. А соответствующая краевая задача корректно поставлена в естественных классах функций, т.е. нагруженный член уравнения задачи является слабым возмущением. [58] В [18] авторы рассматривают сингулярное интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра, но метод последовательных приближений к нему неприменим.

Замечание 5. Можно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau = 0, 0 < t < T$$

Тогда норма интегрального оператора из уравнения (1.2.10) меньше 1. Поэтому, в силу принципа сжимающих отображений, существует единственное решение уравнения (1.2.10) в пространстве непрерывных функций [58].

О решении краевой задачи (1.2.1)-(1.2.2)

Согласно (1.2.14), запишем решение задачи (1.2.1)-(1.2.2) в виде:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (1.2.19)$$

где $f(x, t)$ принадлежит классу (1.2.4), а решение уравнения (1.2.10) $\mu(t)$ является непрерывной и ограниченной функцией в условиях теоремы 1.2.3.

Учитывая неотрицательность функций $G(x, \xi, t-\tau)$ и $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$, принимая во внимание равенство (его можно найти, введя замену $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}$ и интегрированием по частям и применением формулы 3.461(5) из [13].

$$\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau = t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{x^2}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

непосредственно из (1.2.19) получаем следующую оценку

$$|u(x, t)| \leq C(\lambda) x \sqrt{t} \quad (1.2.20)$$

где $C(\lambda) = C_1|\lambda| + C_2$.

Производные решения $u(x, t)$ (1.2.19) удовлетворяют включению

$$u_t - u_{xx} = -\lambda\mu(t) + f(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B), T = \text{const} > 0 \quad (1.2.21)$$

где $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$, $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$, $T - \text{const} > 0$, (этот факт следует из уравнения (1.2.1) и обозначения (1.2.7)).

Итак, функция (1.2.19) удовлетворяет уравнению (1.2.1) в смысле соотношения (1.2.21). Очевидно, что решение (1.2.19) удовлетворяет начальным и граничным условиям (1.2.2). Таким образом, функция (1.2.19) согласно (1.2.20) и (1.2.21) удовлетворяет краевой задаче (1.2.1)-(1.2.2) и принадлежит классу:

$$U = \left\{ u \mid (x\sqrt{t})^{-1}u \in L_\infty(A) \cap C(B); u_t - u_{xx} \in L_\infty(A) \cap C(B); \left. \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^{1-\beta}} d\xi \right\} \right|_{x=\gamma(t)} \in C([0; T]), T = \text{const} > 0, 0 \leq \beta \leq 1 \right\} \quad (1.2.22)$$

где $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$, $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$, $T = \text{const} > 0$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.4. Пусть для функции $f(x, t)$ выполнены условия (1.2.4) и (1.2.5), функция $\mu(t) \in C([0; T])$ является решением интегрального уравнения (1.2.10) с правой частью $f_2(t) \in C([0; T])$, определяемой формулой (1.2.12).

Тогда краевая задача (1.2.1)-(1.2.2) имеет единственное решение (1.2.19) в классе (1.2.22), если $\gamma(t) \sim t^\omega$ (вблизи точки $t = 0$), $\omega \geq 0$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

При условиях доказанной теоремы существует точное решение краевой задачи (1.2.1)-(1.2.2) в классе достаточно гладких функций (1.2.22). Следуя [22], для решения задачи методом энергетических неравенств можно получить априорные оценки для дифференциальных и разностных уравнений. Полученные оценки обеспечивают единственность решения и непрерывную зависимость решения от входных данных задачи. Линейность рассматриваемой задачи с полученными априорными оценками обеспечит сходимость приближенного решения к точному решению с определенной скоростью.

Итак, для моделирования и обоснования теоретических выводов можно получить априорные оценки в дифференциальной и разностной интерпретациях, как в [22], из которых из исходных данных и правой части уравнения будет следовать единственность и устойчивость решения, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Отметим, что в данном разделе получены теоретические результаты, совокупность которых важна в теории нагруженных параболических уравнений.

уравнения является то, что его ядро содержит специальную функцию. Поэтому непосредственное решение интегрального уравнения затруднительно. Далее оценивается его ядро. Этот процесс сопровождается описанием функциональных классов решения и правой части уравнения. Подытоживая, были рассмотрены частные случаи, при которой порядок дробной производной

Перечислим эти результаты. Поставленная краевая задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода путем обращения дифференциальной части задачи. Особенностью полученного интегрального был равен значениям на границах промежутка. На основе полученных результатов установлен интервал изменения порядка дробной производной в нагруженном члене уравнения, для которого доказана теорема о существовании и единственности решения задачи. Кроме того, для предельных случаев порядка дробной производной удается найти явное решение краевой задачи. В некоторых случаях типа нагрузки, содержащей оператор дробного интегрирования, можно найти решение краевой задачи в явном виде, например, в [19].

1.3 Эффект неединственности решения

В области $Q = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$ мы рассматриваем краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \} \Big|_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \quad (1.3.1)$$

$$u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \quad (1.3.2)$$

где λ - комплексный параметр [58];

${}_c D_{0t}^\alpha u(x, t)$ является производной Капуто (12) порядка $\alpha, 2 < \alpha < 3, \gamma(t)$ является непрерывной возрастающей функцией, $\gamma(0) = 0$ или $\gamma(t)$ является положительной const.

Решение задачи и правая часть уравнения принадлежат классам (12) и

$$f(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B), \\ A = \{(x, t) | x > 0, t \in [0, T]\}, B = \{(x, t) | x > 0, t \geq 0\}$$

соответственно.

Сведение задачи к дифференциальному уравнению дробного порядка.

Лемма 1.3.1. Краевая задача (1.3.1)-(1.3.2) сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка.

Доказательство. Обратим дифференциальную часть задачи (1.3.1)-(1.3.2) по формуле (5):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \} \Big|_{x=\gamma(t)} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Принимая во внимание соотношение (6) и вводя обозначение

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

получаем [58] следующее представление решения задачи (1.3.1)-(1.3.2): [58]

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t) \quad (1.3.3)$$

где

$$\mu(t) = \{ {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) \} |_{x=\gamma(t)} \quad (1.3.4)$$

От представления (1.3.3) берём производную порядка $2 < \alpha < 3$ по переменным t с обеих сторон и подставляем $x = \gamma(t)$. С левой стороны получаем функцию $\mu(t)$ согласно формуле [48] (1.3.4)

Поскольку

$${}_c D_{0t}^\alpha \int_0^t \mu(\tau) d\tau = {}_c D_{0t}^{\alpha-1} \mu(t),$$

то краевая задача (1.3.1)-(1.3.2) сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка:

$${}_c D_{0t}^{\alpha-1} \mu(t) + \frac{1}{\lambda} \mu(t) = \frac{1}{\lambda} f_2(t). \quad (1.3.5)$$

При определенных требованиях к $f(x, t)$ (например, дополнительной гладкости по t) и поведению $\gamma(t)$ в окрестности нуля, можно показать, что

$$\mu(0) = 0 \quad \text{и} \quad \mu'(0) = 0.$$

Здесь

$$f_2(t) = \{ {}_c D_{0t}^\alpha f_1(x, t) \} |_{x=\gamma(t)}, \quad (1.3.6)$$

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.3.7)$$

Доказана лемма 1.3.1 о сведении краевой задачи к дифференциальному уравнению дробного порядка.

Исследование дифференциального уравнения дробного порядка. Основной результат

Как было отмечено выше, при определенных требованиях к $f(x, t)$ (например, дополнительной гладкости по t) и поведению $\gamma(t)$ в окрестности нуля, можно показать, что

$$\mu(0) = 0 \quad \text{и} \quad \mu'(0) = 0 \quad (1.3.8)$$

Тогда решение задачи (1.3.7)-(1.3.8) существует, единственно и имеет вид

$$\mu(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f_2(s) (t-s)^{\alpha-2} E_{\alpha-1, \alpha-1} \left(-\frac{1}{\lambda} (t-s)^{\alpha-1} \right) ds. \quad (1.3.9)$$

Отсюда следует существование задачи (1.3.1)-(1.3.2). При этом условия на $f(x, t)$ и $\gamma(t)$ должны гарантировать (1.3.8).

Замечание.

Можно потребовать следующие условия: $\gamma(t) = t^\omega$, $\omega > 0$, $f(x, t)$ удовлетворяет условию $\partial_t^3 f(x, t) = 0$, например, $f(x, t) = a(x) + b(x)t + c(x)t^2$, для всех $x \geq t^\omega$, $t \geq 0$, то есть $f \in C_{x,t}^{2,3}(\overline{Q})$.

Для изучения вопроса о единственности решения задачи (1.3.1)-(1.3.2) рассмотрим однородную задачу, то есть считаем, что $f(x, t) \equiv 0$.

Предположим, что решение однородной задачи существует, причем $\mu(t) \in L(0, T)$. Тогда оно должно удовлетворять соотношению

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau$$

Отсюда следует, что решение однородной задачи зависит только от t (обозначим его через $v(t) = u(x, t)$) и удовлетворяет уравнению

$$v(t) = -\lambda \int_0^t {}_c D_{0t}^\alpha v(\tau) d\tau.$$

Из (1.3.2) следует, что $v(0) = 0$, поэтому можно переписать последнее уравнение в виде

$$v(t) = -\lambda {}_c D_{0t}^{\alpha-1} v(t).$$

Это уравнение имеет ненулевые решения

$$v(t) = C t E_{\alpha-1,2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right)$$

если $C \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Таким образом, для любых $C \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. функция

$$u(x, t) = C t E_{\alpha-1,2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right) \quad (1.3.10)$$

является нетривиальным решением однородной задачи

$$u_t - u_{xx} + \lambda {}_c D_{0t}^{\alpha} u(x, t)|_{x=\gamma(t)} = 0, \quad (1.3.11)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0. \quad (1.3.12)$$

Следовательно, решение задачи (1.3.1)-(1.3.2) для любого $\lambda \neq 0$ не является единственным.

Это можно проверить непосредственно. Действительно,

$$u_t = C \frac{d}{dt} \left[t E_{\alpha-1,2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right) \right] = C E_{\alpha-1,1} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right)$$

$$u_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} {}_c D_{0t}^{\alpha} u(x, t)|_{x=\gamma(t)} &= C D_{0t}^{\alpha-3} \frac{d^3}{dt^3} \left[t E_{\alpha-1,2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right) \right] = \\ &= -\frac{C}{\lambda} D_{0t}^{\alpha-3} \frac{d}{dt} \left[t^{\alpha-2} E_{\alpha-1,\alpha-1} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right) \right] = -\frac{C}{\lambda} D_{0t}^{\alpha-3} t^{\alpha-3} E_{\alpha-1,\alpha-2} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right) = \\ &= -\frac{C}{\lambda} E_{\alpha-1,1} \left(-\frac{1}{\lambda} t^{\alpha-1} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в уравнение (1.3.11) получаем, что функция (1.3.10) является решением задачи (1.3.11)-(1.3.12).

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1.3.2. Решение задачи (1.3.7)-(1.3.8) существует, единственно и имеет вид (1.3.9). Однородная задача (1.3.11)-(1.3.12) имеет нетривиальное решение, которое имеет вид (1.3.10).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.3. Дифференциальное уравнение (1.3.5) с правой частью, определяемыми формулами (1.3.6) ($2 < \alpha < 3$) и (1.3.7), имеет решение, определяемое формулой (1.3.9). Однородная задача, соответствующая задаче (1.3.1)-(1.3.2) имеет нетривиальное решение, которое имеет вид (1.3.10).

Заключение

Итак, функция (1.3.9) является решением уравнения (1.3.5). Тогда решение краевой задачи (1.3.1)-(1.3.2) имеет вид (1.3.3):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t)$$

где функция $f_1(x, t)$ определяется формулой (1.3.7).

Таким образом, можно утверждать, что член с нагрузкой в уравнении для краевой задачи (1.3.1)-(1.3.2) считается сильным возмущением, поскольку согласно (1.3.3) однородная краевая задача (1.3.1)-(1.3.2) (при $f(x, t) = 0$) имеет ненулевые решения в виде (1.3.10).

Результаты, изложенные в данном разделе, опубликованы в работе диссертанта с соавторами [49].

2 НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

2.1 Плоская задача Коши для уравнения дробной диффузии

В области

$$G = \{(x, y; t) \mid -\infty < x, y < +\infty, t > 0\}$$

найти решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha} u = u_{xx} + u_{yy} + \lambda \left\{ D_{0t}^{\beta} u \right\} \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0} + f(x, y, t) \quad (2.1.1)$$

где $D_{0t}^{\sigma} f(t)$ - производная Римана-Лиувилля порядка σ , $0 < \sigma < 1$ и $0 < \beta \leq \alpha < 1$.

Решение уравнения (2.1.1) должно удовлетворять начальному условию:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u &= \varphi(x, y), \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Сведение к интегральному уравнению

Обозначим:

$$\mu(t) = \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta} u \right\} \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0} \quad (2.1.3)$$

Тогда решение задачи (2.1.1) - (2.1.2) можно представить в виде [37]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \\ &+ \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\tau) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \tau) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где [37]

$$\Gamma_{\alpha, 2}(x, y, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} f_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t^{\alpha/2}}, 1; 0 \right) \quad (2.1.5)$$

где [37]

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(z, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \phi(-\alpha/2; \sigma; -z\tau)(\tau^2 - 1)^{\mu/2-1} d\tau, \mu > 0 \\ \phi(-\alpha/2; \sigma; -z), \mu = 0 \end{cases}$$

$$\phi(-a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(b-ak)} \quad (2.1.6)$$

является функцией Райта.

В нашем случае

$$\mu = 1 \neq 0; z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t^{\frac{\alpha}{2}}}; \sigma = 0 \Rightarrow$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(z; 1; 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}; 0; -zt\right) (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Обозначим

$$\varphi_1(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,2}(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta \quad (2.1.7)$$

$$f_1(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \tau) \Gamma_{\alpha,2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau \quad (2.1.8)$$

Затем перепишем представление (2.1.4) в виде:

$$u(x, y, t) = \lambda \int_0^t \mu(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\alpha, 2)(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau +$$

$$+ \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)$$

или

$$u(x, y, t) = \lambda(\mu(t) * \gamma_{\alpha,2}(x, y, t))(t) + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t) \quad (2.1.9)$$

где

$$\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\alpha,2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta \quad (2.1.10)$$

Применим к равенству (2.1.9) оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка β . Имеет место равенство [37, р. 105-109]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{0t}^{\alpha-\zeta} \Gamma_{\alpha,n}(x, y, t) dx dy = \frac{t^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} \quad (2.1.11)$$

В нашем случае $\beta = \alpha - \zeta \Rightarrow \zeta = \alpha - \beta \geq 0; n = 2$. Мы рассматриваем случай $\zeta = \alpha - \beta > 0$, т.е. $\alpha \neq \beta$.

Согласно формуле (2.1.11), функция (2.1.10) принимает вид:

$$\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) = \frac{t^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)} \Big|_{\zeta=\alpha} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Формула дробного дифференцирования свертки двух функций также верна:

$${}_{RL}D_{0t}^{\alpha}(f * g)(t) = ({}_{RL}D_{0t}^{\alpha}g * f)(t) + f(t)\lim_{t \rightarrow 0} {}_{RL}D_{0t}^{\alpha-1}g(t), 0 < \alpha \leq 1$$

Тогда после операции дробного дифференцирования порядка β равенство (2.1.9) примет вид:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_{0t}^{\beta}u(x, y, t) = \lambda \left(\mu(t) * {}_{RL}D_{0t}^{\beta}\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) \right) (t) + \mu(t)\lim_{t \rightarrow 0} {}_{RL}D_{0t}^{\beta-1}\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) + \\ + {}_{RL}D_{0t}^{\beta}\varphi_1(x, y, t) + {}_{RL}D_{0t}^{\beta}f_1(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Принимая во внимание обозначение (2.1.10) и равенство (2.1.11), для первого слагаемого в (2.1.12) имеем

$${}_{RL}D_{0t}^{\beta}\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) = \frac{t^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha - \beta)}$$

так же для второго слагаемого:

$$\lim_{t \rightarrow 0} {}_{RL}D_{0t}^{\beta-1}\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} = 0, \text{ так как } \alpha > \beta$$

Затем, подставляя $x - 1 = t$ и $y - 1 = t$ в (2.1.12), учитывая обозначение (2.1.3) и вводя обозначение

$$f_2(t) = {}_{RL}D_{0t}^{\beta}f_1(x, y, t) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0}; \varphi_2(t) = {}_{RL}D_{0t}^{\beta}\varphi_1(x, y, t) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0} \quad (2.1.13)$$

получаем интегральное уравнение:

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-\alpha+1}} d\tau = f_2(t) + \varphi_2(t) \quad (2.1.14)$$

где $0 < \beta - \alpha + 1 < 1$;

$f_2(t)$ и $\varphi_2(t)$ определяются формулами (2.1.13), (2.1.5)-(2.1.8).

Итак, используя формулу представления для решения задачи (2.1.1)-(2.1.2), получаем интегральное уравнение типа Вольтерра (2.1.14) относительно функции (2.1.3).

Решение интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения получено методом преобразования Лапласа. Обозначим $r = \beta - \alpha + 1$

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-r)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^r} d\tau = F(t) \quad (2.1.15)$$

где $\varphi(t) = f_2(t) + \varphi_2(t)$.

Пусть $\Phi(s) = L[\mu(t)]$ - изображение Лапласа функции $\mu(t)$. Применяя интегральное преобразование Лапласа к уравнению (2.1.15), получаем [20, p. 145-150].

$$\Phi(s) - \frac{\lambda\Phi(s)}{s^{1-r}} = \Psi(s),$$

где $\Psi(s) = L[\psi(t)]$, или

$$\Phi(s) = \Psi(s) + \lambda \frac{\Psi(s)}{s^{1-r} - \lambda}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение интегрального уравнения (2.1.15):

$$\mu(t) = \psi(t) + \lambda\psi(t) * t^{-r} E_{1-r;1-r}(\lambda t^{1-r}),$$

где $E_{a,b}(z)$ является функцией Миттаг-Леффлера.

Решение задачи (2.1.1) - (2.1.2). Основной результат

Учитывая представление (2.1.9), получаем:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \lambda \left(\psi(t) * \gamma_{\alpha,2}(x, y, t) \right) (t) + \\ & + \lambda^2 \left(\left(\psi(t) * t^{-r} E_{1-r;1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) * \gamma_{\alpha,2}(x, y, t) \right) (t) + \\ & + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t) \end{aligned}$$

В силу свойства ассоциативности свертки имеем

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) = & \lambda \left(\psi(t) * \gamma_{\alpha,2}(x, y, t) \right) + \\
& + \lambda^2 \psi(t) * \left(\left(\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) * \left(t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) \right) (t) \right) + \\
& + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

где $r = \beta - \alpha + 1$.

Вычислим

$$\left(\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) * \left(t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) \right) (t)$$

Так как

$$\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

тогда

$$\left(\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) * \left(t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) \right) (t) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \left(t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) \right) (t)$$

является дробным интегралом порядка α функции $g(t) = t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r})$ начиная с 0 и заканчивая t . Тогда, принимая во внимание обозначение $r = \beta - \alpha + 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\left(\gamma_{\alpha,2}(x, y, t) * \left(t^{-r} E_{1-r,1-r}(\lambda t^{1-r}) \right) \right) (t) &= I_{0t}^{\alpha} \left(t^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) = \\
&= t^{2\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, 2\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta})
\end{aligned}$$

Решение (2.1.16) можно переписать как:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) = & \lambda \left(\psi(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) (t) + \lambda^2 \left(\psi(t) * \left(t^{2\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, 2\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \right) (t) + \\
& + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

где $\varphi_1(x, y, t)$ и $f_1(x, y, t)$ – определяются формулами (2.1.7) и (2.1.8) соответственно.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Функция (2.1.17) является решением задачи (2.1.1)-(2.1.2), где функции $\varphi_1(x, y, t)$ и $f_1(x, y, t)$ определяются начальной функцией $\varphi(x, y)$ из

условия (2.1.2) и правой частью $f(x, y, t)$ из уравнения (2.1.1) соответственно. $E_{a,b}(z)$ является функцией Миттаг-Леффлера и

$$\psi(t) = D_{0t}^{\beta}(\varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0}$$

2.2 Одномерная задача Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения с временной нагрузкой

В области

$$\Omega = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty; t > 0\}$$

найти регулярное решения уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + \lambda D_{0t}^{\beta}u \Big|_{x=\gamma(t)} + f(x, t) \quad (2.2.1)$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u = 0; \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2}u = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0; \alpha \in (1; 2); \beta \in (0; 1) \quad (2.2.2)$$

где $D_{0t}^{\nu}f(t) = 0$ дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\nu \in R$ (для $\nu \leq 0$, $D_{0t}^{\nu}f(t)$ является дробным интегралом Римана-Лиувилля);

λ - комплексный параметр;

$\gamma(t)$ неотрицательная, возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Сведение задачи к интегральному уравнению

Решение задачи (2.2.1)-(2.2.2) можно записать в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|x - \xi|(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|x - \xi|(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) d\xi (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \mu(\tau) d\tau$$

или

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^t I(\alpha; t - \tau) (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t) \quad (2.2.3)$$

Здесь

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -r - \xi(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (2.2.4)$$

$$I(\alpha; t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|x - \xi|(t - \tau)^{-\alpha/2}\right) d\xi \quad (2.2.5)$$

$$\mu(t) = D_{0t}^{\beta} u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \quad (2.2.6)$$

где $\Phi(a, b; z)$ – функция Райта (0.0.10).

Так как

$$\int_{R_n} f_{\beta}(x; \nu, \sigma) dx = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(n\beta + \sigma)}$$

и

$$f_{\beta}(z; 0; \delta) dx = \Phi(-\beta, \delta; -z)$$

Тогда, при $n = 1$ и $\nu = 0$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-\beta, \sigma; -x) dx = \frac{2}{\Gamma(\beta + \sigma)}$$

Тогда подставляя переменную $z = x - \xi(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}$, мы получаем следующее представление для интеграла (2.2.5):

$$I(\alpha; t - \tau) = (t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -z\right) dz = \frac{2(t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)}$$

Уравнение (2.2.3) можно записать в виде:

$$u(x, t) = \lambda \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t)$$

или в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \mu(t) + f_1(x, t) \quad (2.2.7)$$

Затем к уравнению (2.2.7) применим операцию дробной производной порядка $\beta \in (0; 1)$ по переменной времени. Перед этим найдем дробную производную от указанной свертки. В случае $\nu \in (n - 1; n]$ для свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ верна следующая формула:

$$D_{0t}^{\nu} (f * g)(t) = (f * D_{0t}^{\nu} g)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(t) \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\nu-k-1} g(t)$$

Итак, для $\beta \in (0; 1)$ имеем:

$$D_{0t}^{\nu}(t^{\alpha-1} * \mu(t)) = \mu(t) * D_{0t}^{\beta} t^{\alpha-1} + \mu(t) \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\beta-1} t^{\alpha-1} \quad (2.2.8)$$

Согласно формуле

$$\frac{D_{0t}^{\sigma} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \frac{t^{\nu-\sigma-1}}{\Gamma(\nu-\sigma)}, \nu > 0, \sigma \in R$$

уравнение (2.2.8) становится:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\beta}(t^{\alpha-1} * \mu(t)) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} * \mu(t) + \mu(t) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta-1)} t^{\alpha-\beta} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} * \mu(t) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Затем, когда мы применяем дробную производную порядка $\beta \in (0; 1)$ к (2.2.7) и рассматриваем уравнение (2.2.9), получаем:

$$D_{0t}^{\beta} u(x, t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} * \mu(t) + D_{0t}^{\beta} f_1(x, t)$$

Затем, вводя переменную $x = \gamma(t)$ с учетом (2.2.6), приходим к интегральному уравнению Абеля:

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} * \mu(t) = f_2(t) \quad (2.2.10)$$

Здесь

$$f_2(t) = D_{0t}^{\beta} f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \quad (2.2.11)$$

Лемма 2.2.1. Задача (2.2.1)-(2.2.2) сводится к интегральному уравнению Абеля (2.2.10) относительно неизвестной функции $\mu(t)$, в котором правая часть уравнения $f_2(t)$ определяется формулами (2.2.11) и (2.2.4).

Решение интегрального уравнения (2.2.10)

Будем считать, что $f_2(t) \in L_1([0; \tau])$. Отметим это, так как мы ставим условие на функцию $f(x, t)$.

В соответствии с дробным интегралом Римана-Лиувилля

$$D_{0t}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} * f(t), \nu > 0,$$

уравнение (2.2.10) можно переписать как:

$$\mu(t) - \lambda D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \mu(t) = f_2(t) \quad (2.2.12)$$

Уравнение (2.2.12) с правой частью $f_2(t) \in L_1([0; \tau])$ имеет единственное решение, которое определяется формулой (2.2.13):

$$\mu(t) = f_2(t) + \lambda f_2(t) * \left(t^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \quad (2.2.13)$$

где $E_{a,b}(z)$ -функция Миттаг-Леффлера. Как $f_2(t) \in L_1([0; \tau])$, так и $\mu(t) \in L_1([0; \tau])$.

Решение (2.2.1)-(2.2.2)

Подставляя функцию (2.2.13) в формулу (2.2.7) решения задачи (2.2.1)-(2.2.2) и учитывая свойство ассоциативности свертки, получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \left(f_2(t) + \lambda f_2(t) * \left(t^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \right) + f_1(x, t) = \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f_2(t) + \frac{\lambda^2}{\Gamma(\alpha)} \left(t^{\alpha-1} * \left(t^{\alpha-\beta-1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \right) * f_2(t) + f_1(x, t) = \\ &= \lambda \left(t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \lambda t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, 2\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) \right) * f_2(t) + f_1(x, t) = \\ &= \lambda \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) * f_2(t) + f_1(x, t) \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали теорему ниже.

Теорема 2.2.2. Пусть $\alpha \in (1; 2)$; $\beta \in (0; 1)$, $t^{1-\beta} f(x, t) \in C(\Omega)$. Тогда существует единственное решение уравнения (2.2.1) в области Ω , удовлетворяющее условию (2.2.2) и имеющее следующее представление:

$$u(x, t) = \lambda \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta}) \right) * f_2(t) + f_1(x, t) \quad (2.2.14)$$

здесь $f_2(t)$ и $f_1(x, t)$ определяются формулами (2.2.11) и (2.2.4).

Замечание 6. В соответствии с условиями теоремы задача (2.2.1)-(2.2.2) имеет единственное решение, определяемое формулой (2.2.14). Следовательно, нагруженный член является слабым возмущением для $\beta \in (0; 1)$.

2.3 Одномерная задача Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения с пространственной нагрузкой

В области

$$\Omega = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty; t > 0\}$$

найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + \lambda D_{0x}^{\beta}u \Big|_{x=\gamma(t)} + f(x, t) \quad (2.3.1)$$

которое удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u = 0; \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2}u = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0; \alpha \in (1; 2); \beta \in (0; 1) \quad (2.3.2)$$

где $D_{0y}^{\nu}f(y)$ - дробная производная типа Римана-Лиувилля порядка $\nu \in R$ (в случае $\nu \leq 0$, то $D_{0y}^{\nu}f(y)$ -она становится типом интеграла РиманаЛиувилля);

λ - некоторый комплексный параметр;

$\gamma(t)$ - неотрицательная, возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Решение задачи (2.3.1)-(2.3.2) можно переписать в виде:

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \mu(t) + f_1(x, t) \quad (2.3.3)$$

здесь $f_1(x, t)$ определяется формулой (2.3.4)

$$\mu(t) = D_{0x}^{\beta}u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)}, \beta \in (0; 1) \quad (2.3.4)$$

Далее к представлению (2.3.3) применяем дробную производную порядка $\beta \in (0; 1)$ по пространственной переменной и положим $x = \gamma(t)$. Из левой части уравнения с учетом (2.3.4) получаем функцию $\mu(t)$. В результате, учитывая формулу

$$D_{0x}^{\beta}1 = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}; \beta \in (0; 1)$$

Уравнение (2.3.3) принимает вид:

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)} (\gamma(t))^{-\beta} (t^{\alpha-1} * \mu(t)) = f_2(t) \quad (2.3.5)$$

здесь

$$f_2(t) = D_{0x}^{\beta}f_1(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} \quad (2.3.6)$$

Итак, (2.3.5) - интегральное уравнение Вольтерра.

Лемма 2.3.1. Задача (2.3.1)-(2.3.2) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго порядка:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{\alpha,\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t) \quad (2.3.7)$$

Здесь

$$K_{\alpha,\beta}(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)(\gamma(t))^\beta}, \quad \alpha \in (1; 2), \beta \in (0; 1) \quad (2.3.8)$$

$f_2(t)$ определяется формулами (2.3.6) и (1.3.4).

Ядро (2.3.8) имеет особенность при $\gamma(t) = 0$, т.е. при $t = 0$, так как по условию $\gamma(0) = 0$.

Пусть $\gamma(t) \sim t^w$; $w > 0$ для $t \rightarrow 0 + 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+0} K_{\alpha,\beta}(t,\tau) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)} \lim_{t \rightarrow 0} (t-\tau)^{\alpha-1} t^{-\beta w} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha - \beta w - 1 \geq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)} & \text{при } \alpha - 1 - \beta w = 0 \\ \infty & \text{при } \alpha - 1 - \beta w \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Перепишем ядро в виде (в окрестности $t = 0$):

$$K_{\alpha,\beta}(t,\tau) = \frac{L_\beta(t,\tau)}{(t-\tau)^{2-\alpha}}$$

здесь

$$L_\beta(t,\tau) = (t-\tau)t^{-\beta w}$$

Для того чтобы $L_\beta(t,\tau)$ была ограничена в области $Q = \{(t,\tau) \mid 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$ достаточно, чтобы выполнялось условие $1 - \beta w \geq 0$. Тогда выполняется следующая лемма:

Лемма 2.3.2. Интегральное уравнение (2.3.7) с ядром (2.4.8) при $0 \leq \beta \leq 1$; $1 \leq \alpha \leq 2$ и с $\gamma(t) \sim t^w$ в окрестности точки $t = 0$ однозначно разрешено в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части $f_2(t)$, если $0 < w \leq \frac{1}{\beta}$.

Замечание 7. В соответствии с условием, наложенным на функцию $f(x,t)$, и обозначениями (2.3.4) и (2.3.6) правая часть уравнения (2.3.7) является непрерывной функцией и при условиях леммы 2.3.2 решение $\mu(t)$ может быть найдено методом последовательных приближений.

Учитывая обозначение (2.3.3), решение задачи (2.3.1)-(2.3.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \mu(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \Phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -x - \xi(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

здесь $x^{2-\mu}f(x, t) \in C(\Omega)$, $\mu(t) \in C([0; T])$ в соответствии с условиями леммы 2.3.2.

Рассматривая оценку функции Райта

$$t^{\nu-1}\Phi\left(-\alpha; \nu; -xt^{-\alpha} \leq Cx^{-\theta}t^{\nu+\alpha\theta-1}; \theta\right) \geq \begin{cases} 0; & \text{if } (-\beta) \notin N \cup \{0\} \\ -1; & \text{if } (-\beta) \in N \cup \{0\} \end{cases}$$

непосредственно из (2.3.9) получаем оценку:

$$u(x, t) \leq \frac{C_1(\lambda)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + C_2 t^{\frac{\alpha}{2}} \leq \text{const for } t \in [0; T]$$

Кроме того, из уравнения (2.3.9) следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, ввиду асимптотического разложения функции Райта.

Здесь:

$$Y = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} (t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}$$

Теорема 2.3.3. Пусть $x^{2-\alpha}f(x, t) \in C(\Omega)$. Тогда функция, определяемая формулой (2.3.9), является решением краевой задачи (2.3.1)-(2.3.2), здесь $\mu(t)$ -решение интегрального уравнения (2.3.7) с правой частью $f_2(t)$, определяемой формулами (2.3.4) и (2.3.6).

Спектральный случай задачи (2.3.1)-(2.3.2)

Согласно лемме 2.3.1 краевая задача сводится к интегральному уравнению (2.3.7) с ядром (2.3.8) Рассмотрим соответственно однородное уравнение:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{\alpha, \beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = 0 \quad (2.3.10)$$

с ядром $K_{\alpha, \beta}(t, \tau)$, определяемым формулой (2.3.8). Будем искать решение уравнения (2.3.10) в виде:

$$\mu(t) = t^\nu; \nu \in R \quad (2.3.11)$$

здесь ν - неизвестное число.

Сначала вычислим интеграл:

$$\int_0^t \tau^\nu (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \left\| x - \frac{\tau}{t}; 0 \leq x \leq 1 \right\| = t^{\nu+\alpha} \int_0^1 t^\nu (1-x)^{\alpha-1} dx = B(\nu + 1; \alpha) t^{\nu+\alpha}; \nu > -1.$$

Затем после применения формулы (2.3.11) к уравнению (2.3.10), мы получим

$$t^\nu - \frac{\lambda B(\nu + 1; \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \beta)(\gamma(t))^\beta} t^{\nu+\alpha}; \nu > -1$$

или

$$1 - \frac{\lambda\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\nu + 1 + \alpha)} \frac{t^\alpha}{(\gamma(t))^\beta} = 0$$

или

$$\frac{t^\nu}{(\gamma(t))^\beta} = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\nu+1+\alpha)}{\lambda\Gamma(\nu+1)} \quad (2.3.12)$$

В случае $\gamma(t) = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$, получаем

$$\lambda = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\nu+1+\alpha)}{\lambda\Gamma(\nu+1)}, \nu > -1, \beta \in (0; 1); \alpha \in (-1; 2) \quad (2.3.13)$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.3.4. Число (2.3.13) является характеристическим числом интегрального уравнения (2.3.10) с ядром (2.3.8). Функция (2.3.11) является соответствующей собственной функцией в случае $\gamma(t) = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Рассмотрим краевую задачу (2.3.1)-(2.3.2), решение которой имеет представление (2.3.3).

Пусть $f(x, t) \equiv 0$. Тогда из (2.3.3) получаем

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * \mu(t) \quad (2.3.14)$$

Подставляя (2.3.11) и (2.3.13) в (2.3.14), получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\nu + 1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu + 1)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\nu d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\nu + 1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu + 1)} B(\nu + 1; \alpha) t^{\nu+\alpha} = \Gamma(1 - \beta) t^{\nu+\alpha} \end{aligned}$$

или

$$u(x, t) = \Gamma(1 - \beta) t^{\nu+\alpha}, \nu > -1 \quad (2.3.15)$$

Проверяя напрямую, мы можем убедиться, что функция (2.3.15) является решением однородной краевой задачи, соответствующей задаче (2.3.1)-(2.3.2).

2.4 Задача Коши в многомерной области для дробной диффузии уравнения с вырождающейся нагрузкой

Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = \lambda y^{\mu} \left[D_{0y}^{\beta} u(x, y) \right]_{x=z(y)} + f(x, y) \quad (2.4.1)$$

где D_{0y}^{γ} обозначает дробную производную Римана-Лиувилля (или интеграл) порядка γ по y с началом в точке $y = 0$ [27,36]; $z(y): (0, T) \rightarrow R^n$; $0 < \alpha < 1, \beta < \alpha$; $\mu \in R$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; и

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

где Δ_x – оператор Лапласа относительно x .

Уравнение (2.4.1) относится к классу нагруженных уравнений в частных производных [27, 29] с оператором дробной диффузии в главной части. Уравнения дробной диффузии изучались очень интенсивно в последние десятилетия. Эти исследования начались с работ [18, 40] и в настоящее время имеют большую библиографию. Краткие обзоры можно найти в [11, 35, 36]. Подробные обзоры даны в статье [17] и монографиях [3, 5, 33].

В настоящее время активно изучаются нагруженные дифференциальные уравнения, в том числе параболические, а также дробные уравнения диффузии и диффузионно-волновые уравнения. В этой связи отметим работы [4, 6, 7, 8, 9, 10, 21, 23,24, 25, 26, 30], которые отражают многообразие проблем и подходов в этой научной области.

Целью данной работы является решение задачи Коши для уравнения (2.4.1). Задача сводится к интегральному уравнению. В терминах ее решения строятся решения рассматриваемой задачи. Приводятся достаточные условия на параметры, обеспечивающие существование и единственность решения. Показано, что нарушение некоторых из указанных условий приводит к неединственности решения. Рассматривая коэффициент λ как спектральный параметр, обнаруживается, что однородная задача Коши при некоторых значениях параметра μ имеет нетривиальное решение, то есть в этом смысле спектр этой задачи не пуст.

Определения и постановка задачи

Дробный интеграл Римана-Лиувилля и производная порядка γ с началом в точке $y = 0$ определяется как

$$D_{0y}^\gamma g(y) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^y g(t)(y-t)^{-\gamma-1} dt \quad (\gamma < 0)$$

$$D_{0y}^0 g(y) = g(y); D_{0y}^\gamma g(y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} D_{0y}^{\gamma-n} g(y) \quad (n-1 < \gamma \leq n, n \in \mathbb{N}) \quad (2.4.2)$$

В дальнейшем мы рассмотрим

$$\Omega = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^n, y \in (0, T)\} = \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

и

$$\Omega_0 = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^n, y \in [0, T)\} = \mathbb{R}^n \times [0, T)$$

Как обычно, $AC[0, T)$ обозначает пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0, T - \varepsilon]$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Функция $u(x, y)$ называется регулярным решением уравнения (2.4.1) в Ω , если $y^{1-\delta} u(x, y) \in C(\Omega_0)$ для некоторого $\delta > 0$; $D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y)$ принадлежит $AC[0, T)$ как функция y для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$; $u(x, y)$ имеет непрерывные производные по x_k ($k = 1, \dots, n$) до второго порядка в Ω ; и $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.4.1) в Ω , удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4.3)$$

Сведение к интегральному уравнению

Пусть $u(x, y)$ будет регулярным решением задачи (2.4.1) и (2.4.3) и пусть $v(y)$ обозначает нагруженный член в (2.4.1), т.е. мы предположим, что

$$y^{1-\varepsilon} v(y) \in C[0, T) \text{ для } \varepsilon + \mu > 0 \quad (2.4.4)$$

и $u(x, y)$ удовлетворяет условию Тихонова

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\delta} u(x, y) \exp\left(-\sigma |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \text{ для } \sigma > 0 \quad (2.4.5)$$

и $\tau(x)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tau(x) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \quad (2.4.6)$$

и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\delta} f(x, y) \exp\left(-\rho |x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0 \quad (2.4.7)$$

для некоторого $\rho < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{2T}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}}$.

При сделанных выше предположениях $u(x, y)$ можно записать как [34]:

$$u(x, y) = \int_{R^n} \tau(s) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y) ds + \int_0^y \int_{R^n} [f(s, t) + \lambda t^\mu v(t)] \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y - t) ds dt,$$

здесь

$$\Gamma_{\alpha, n}(x, y) = C_n y^{\frac{\alpha}{2}(2-n)-1} f_{\frac{\alpha}{2}}\left(|x|y^{-\frac{\alpha}{2}}; n-1, \frac{\alpha}{2}(2-n)\right) \quad (2.4.8)$$

является фундаментальным решением уравнения дробной диффузии. Здесь,

$$C_n = 2^{-n} \pi^{\frac{1-n}{2}}, f_\gamma(z; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right)} \int_1^\infty \phi(-\gamma, \eta; -zt) (t^2 - 1)^{\frac{\xi}{2}-1} dt, & \text{if } \xi > 0, \\ \phi(-\gamma, \eta; -z), & \text{if } \xi = 0, \end{cases}$$

и

$$\phi(\xi, \eta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)}$$

это функция Райта [38, 39].

По равенству [34]

$$\int_{R^n} \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y) ds = \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

и (2.4.2) мы можем переписать уравнение (2.4.8) в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \lambda D_{0y}^{-\alpha} [y^\mu v(y)] \quad (2.4.9)$$

где

$$u_0(x, y) = \int_{R^n} \tau(s) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y) ds + \int_0^y \int_{R^n} f(s, t) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y - t) ds dt$$

$$v(y) = \left[D_{0y}^\beta u(x, y) \right]_{x=z(y)}$$

Лемма 2.4.1. Пусть $u(x, y)$ - регулярное решение задачи (2.4.1), (2.4.3) и пусть (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6) и (2.4.7) выполнены. Тогда функция $v(y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(y) = v_0(y) + \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} [y^\mu v(y)] \quad (2.4.10)$$

где

$$v_0(y) = \left[D_{0y}^\beta u_0(x, y) \right]_{x=z(y)} \quad (2.4.11)$$

Доказательство. Применяя D_{0y}^β по обе стороны от (2.4.9) и подставляя $x = z(y)$, получаем (2.4.10).

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи (2.4.1), (2.4.3) сводится к вопросу о разрешимости интегрального уравнения (2.4.10).

Дополнительные утверждения

Далее будем предполагать, что $z(y)$ непрерывна и ограничена, т.е.

$$z(y) \in C(0, T) \text{ и } \sup_{(0, T)} |z(y)| < \infty \quad (2.4.12)$$

где $|z|$ и далее обозначает норму элемента $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ в R^n , т.е. $|z| = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}$.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные константы, которые в разных случаях различны. В скобках при необходимости укажем параметры, от которых могут зависеть эти константы: $C = C(\alpha, \beta, \dots)$.

Лемма 2.4.2. Пусть $\tau(x) \in C(R^n)$; $y^{1-\delta} f(x, y) \in C(\Omega_0)$ для некоторого $\delta > 0$; пусть $y^{1-\delta} f(x, y)$ будет непрерывным по Гёльдеру относительно x ; и пусть (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.12) выполнены. Тогда

$$y^{1-\alpha+\beta} v_0(y) \in C[0, T] \quad (2.4.13)$$

где функция $v_0(y)$ определяется как (2.4.11).

Доказательство. Пусть

$$H(x, y) = \int_{R^n} \tau(s) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y) ds$$

и

$$F(x, y) = \int_0^y \int_{R^n} f(s, t) \Gamma_{\alpha, n}(x - s, y - t) ds dt.$$

По [34, р. 1585-1593], мы получаем что

$$\left| D_{0y}^\beta H(x, y) \right| \leq C y^{\alpha-\beta-1}$$

и

$$\left| D_{0y}^\beta F(x, y) \right| \leq C y^{\alpha-\beta+\delta-1}.$$

В частности, это означает, что $y^{1-\alpha+\beta}u_0(x, y) \in C(\Omega_0)$. Объединяя это, (2.4.11) и (2.4.12) даёт (2.4.13).

Лемма 2.4.3. Пусть $\nu > 0, y^{1-\varepsilon}h(y) \in C[0, T], \mu + \varepsilon > 0$, and $\mu + \nu > 0$. Тогда

$$|(D_{0y}^{-\nu}y^\mu)^m h(y)| \leq C \frac{y^{m(\mu+\nu)+\varepsilon-1}}{\nu^m \nu (m!)^\nu} h^*(y) \quad (2.4.14)$$

где $C = C(\varepsilon, \mu, \nu)$

$$h^*(y) = \sup_{0 < t < y} t^{1-\varepsilon} |h(t)| \quad (2.4.15)$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$|D_{0y}^{-\nu}y^\mu h(y)| \leq h^*(y) D_{0y}^{-\nu}y^{\mu+\varepsilon-1} = \frac{\Gamma(\mu + \varepsilon)}{\Gamma(\mu + \nu + \varepsilon)} y^{\mu+\nu+\varepsilon-1} h^*(y).$$

По определению (2.4.15) функция $h^*(y)$ неотрицательна, неубывающая и непрерывная на $[0, T)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} |[D_{0y}^{-\nu}y^\mu]^2 h(y)| &\leq \frac{\Gamma(\mu + \varepsilon)}{\Gamma(\mu + \nu + \varepsilon)} h^*(y) D_{0y}^{-\nu}y^{2\mu+\nu+\varepsilon-1} = \\ &= \frac{\Gamma(\mu + \varepsilon)\Gamma(2\mu + \nu + \varepsilon)}{\Gamma(\mu + \nu + \varepsilon)\Gamma(2(\mu + \nu) + \varepsilon)} y^{2(\mu+\nu)+\varepsilon-1} h^*(y) \end{aligned}$$

Наконец, по индукции получаем

$$|[D_{0y}^{-\nu}y^\mu]^m h(y)| \leq y^{m(\mu+\nu)+\varepsilon-1} h^*(y) \prod_{k=1}^m \frac{\Gamma(k\mu+(k-1)\nu+\varepsilon)}{\Gamma(k(\mu+\nu)+\varepsilon)} \quad (2.4.16)$$

Неравенство

$$\frac{\Gamma(z - \nu)}{\Gamma(z)} \leq C z^{-\nu} \quad (z \geq z_0 > 0, C = C(\nu, z_0))$$

означает что

$$\prod_{k=1}^m \frac{\Gamma(k\mu + (k-1)\nu + \varepsilon)}{\Gamma(k(\mu + \nu) + \varepsilon)} \leq C \prod_{k=1}^m (k(\mu + \nu) + \varepsilon)^{-\nu} \leq C(\nu^m m!)^{-\nu}.$$

Объединение этого и (2.4.16) приводит к (2.4.14). Решение интегрального уравнения (2.4.10).

Пусть $v(y)$ будет решением (2.4.10), удовлетворяющим (2.4.4). Итерациями получаем

$$v(y) = v_0(y) + \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu v(y) = v_0(y) + \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu v_0(y) + \lambda^2 \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^2 v(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^k v_0(y) + \lambda^m \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^m v(y) \quad (2.4.17)$$

Предположим, что $\mu + \alpha - \beta > 0$. Лемма 2.4.2 и лемма 2.4.3 доказывают, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^m v(y) \right| \leq C \frac{y^{m(\mu+\alpha-\beta)+\varepsilon-1}}{(\alpha-\beta)^{m(\alpha-\beta)} (m!)^{\alpha-\beta}} \sup_{0 < t < y} t^{1-\varepsilon} |v(t)|$$

Это дает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^m \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^m v(y) = 0$$

и сходимость равномерна по $y \in [0, T_0]$ для любого $T_0 \in (0, T)$. Позволяя $m \rightarrow \infty$ в (2.4.17), получаем

$$v(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(D_{0y}^{\beta-\alpha} y^\mu \right)^k v_0(y) \quad (2.4.18)$$

Легко видеть, что ряд (2.4.18) сходится равномерно в $y \in [0, T_0]$ для любого $T_0 \in (0, T)$.

Лемма 2.4.4. Пусть $\mu + \alpha - \beta > 0$. Интегральное уравнение (2.4.10) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих (2.4.4). Решение имеет вид (2.4.18) и удовлетворяет включению

$$y^{1-\alpha+\beta} v(y) \in C[0, T] \quad (2.4.19)$$

Доказательство. Как показано выше, если $v(y)$ является решением (2.4.10) и удовлетворяет (2.4.4), то $v(y)$ имеет вид (2.4.18). Ввиду линейности (2.4.10) это доказывает единственность решения. Простое вычисление доказывает, что (2.4.18) удовлетворяет (2.4.10). Включение (2.4.19) следует из (2.4.13), (2.4.14) и (2.4.18).

Основной результат

Теперь сформулируем теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Теорема 2.4.5. Пусть $\tau(x) \in C(R^n)$; $y^{1-\delta}f(x, y) \in C(\Omega_0)$ для некоторого $\delta > 0$; пусть $y^{1-\delta}f(x, y)$ будет непрерывным по Гёльдеру относительно x ; и пусть (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.12) выполняются; и

$$\mu > \beta - \alpha \quad (2.4.20)$$

Тогда существует решение задачи (2.4.1) и (2.4.3). Решение имеет вид (2.4.8), где функция $v(y)$ является решением интегрального уравнения (2.4.10) и задается выражением (2.4.18).

Доказательство. По (2.4.19) и (2.4.20), функция

$$f(x, y) + \lambda y^\mu v(y)$$

удовлетворяет условиям, гарантирующим, что (2.4.8) будет регулярным решением уравнения

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y) + \lambda y^\mu v(y) \quad (2.4.21)$$

и удовлетворять (2.4.3) (см. [34, р. 1585-1593]). Непосредственная проверка показывает, что решение (2.4.21) удовлетворяет соотношению

$$v(y) = y^\mu \left[D_{0y}^\beta u(x, y) \right]_{x=z(y)}$$

если $v(y)$ является решением (2.4.10). Это доказывает, что функция (2.4.8) является регулярным решением задачи (2.4.1) и (2.4.3).

Теорема 2.4.6. Пусть выполняются (2.4.12) и (2.4.20). Существует не более одного регулярного решения задачи (2.4.1) и (2.4.3) в классе функций, удовлетворяющих (2.4.5).

Доказательство. Поскольку задача линейна, для доказательства теоремы достаточно показать, что соответствующая однородная задача $D_{0y}^\alpha \tilde{u}(x, y) - \Delta_x \tilde{u}(x, y) = \lambda y^\mu \left[D_{0y}^\beta \tilde{u}(x, y) \right]_{x=z(y)}$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \tilde{u}(x, y) = 0$, $x \in R^n$, имеет только тривиальное решение.

Пусть $\tilde{u}(x, y)$ будет решением (2.4.22) и

$$\tilde{v}(y) = \left[D_{0y}^\beta \tilde{u}(x, y) \right]_{x=z(y)} \quad (2.4.22)$$

Тогда по лемме 2.4.1 $\tilde{v}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{v}(y) = \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} [y^\mu \tilde{v}(y)]$$

Принимая во внимание лемму 2.4.4, получаем, что $\tilde{v}(y) \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{u}(x, y)$ является решением задачи

$$D_{0y}^{\alpha} \tilde{u}(x, y) - \Delta_x \tilde{u}(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \tilde{u}(x, y) = 0, x \in R^n \quad (2.4.23)$$

Как известно [34, р. 1585-1593], задача (2.4.23) имеет только тривиальное решение в классе функций, удовлетворяющих (2.4.5). Таким образом, $\tilde{u}(x, y) \equiv 0$. Это завершает доказательство.

Спектральный случай

Здесь мы покажем, что условие (2.4.20) является существенным и его нарушение может привести к неединственному решению задачи (2.4.1), (2.4.3).

Пусть

$$\mu = \beta - \alpha \quad (2.4.24)$$

Рассмотрим уравнение

$$v(y) = \lambda D_{0y}^{\beta-\alpha} [y^{\beta-\alpha} v(y)] \quad (2.4.25)$$

Легко проверить, что для любого C и $\gamma > \alpha - \beta$ функция

$$v(y) = Cy^{\gamma-1}$$

удовлетворяет уравнению (2.4.25), если

$$\lambda = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \beta - \alpha)}.$$

Таким образом, в случае (2.4.24) однородное интегральное уравнение (2.4.25) имеет нетривиальные решения.

Лемма 2.4.7. Пусть $\mu = \alpha - \beta$ и $\lambda > 0$. Тогда задача (2.4.1), (2.4.3) имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что соответствующая однородная задача

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = \lambda y^{\beta-\alpha} \left[D_{0y}^{\beta} u(x, y) \right]_{x=z(y)}, \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = 0 \quad (2.4.26)$$

имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(t) = \frac{\Gamma(t - \beta)}{\Gamma(t - \alpha)}.$$

Легко проверить, что

$$\Lambda(t) \in C(\alpha, \infty), \Lambda(t) > 0 \text{ for } t \in (\alpha, \infty),$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \Lambda(t) = 0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty.$$

Это означает, что для любого $\lambda > 0$ существует $\gamma \in (\alpha, \infty)$ такое, что

$$\lambda = \Lambda(\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \quad (2.4.27)$$

Для заданной λ выберем γ , удовлетворяющую равенству (2.4.27), и рассмотрим функцию:

$$u(x, y) = Cy^{\gamma-1} \quad (2.4.28)$$

Простой расчет дает, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = C \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} y^{\gamma-\alpha-1} = 0$$

и

$$\begin{aligned} & D_{0y}^{\alpha} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) - \lambda y^{\beta-\alpha} \left[D_{0y}^{\beta} u(x, y) \right]_{x=z(y)} = \\ & = C \left[D_{0y}^{\alpha} - \lambda y^{\beta-\alpha} D_{0y}^{\beta} \right] y^{\gamma-1} = C \Gamma(\gamma) y^{\gamma-\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha)} - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma - \beta)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $C \neq 0$ функция (2.4.28) является нетривиальным регулярным решением задачи (2.4.26). Это доказывает лемму.

Результаты, изложенные в данном разделе, опубликованы в работах диссертанта с соавторами [48], [50], [51].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе были рассмотрены краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности. Исследовались разрешимость, единственность и сходимости решения этих задач. В связи с тем, что в процессе решения задач, были получены несобственные интегралы, сходимости и существование которых необходимы для решения краевой задачи, классы для искомой функции в уравнении [59] были определены заранее. Для решения поставленных краевых задач применялся метод сведения краевой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода путем обращения дифференциальной части задачи. Рассматривались случаи, где интегральные уравнения содержат в себе собственную функцию, в таких случаях была проведена оценка ядра уравнения. Также изучались предельные случаи порядка дробной производной при непрерывности относительно порядка дробной производной. На основе полученных результатов была доказана теорема о существовании и единственности решения задачи при определенном промежутке допустимых значений порядка дробной производной в нагруженном члене уравнения.

Стоит отметить, что в данной работе получены теоретические результаты, совокупность которых важна в теории нагруженных параболических уравнений. Основные результаты могут быть подытожены следующим образом:

1. Было сформулировано семь задач для нагруженных уравнений и/или уравнений дробного порядка, включающие в себя различные виды дробных операторов.

2. Было получено пять точных решений (где решения существуют и единственны) для семи поставленных задач. Решения были получены путем сведения задач к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям. На основе полученных результатов был установлен интервал изменения порядка дробной производной в нагруженном члене уравнения, для которого доказана теорема о существовании и единственности решения задачи.

3. Для двух задач (шестой и седьмой задачах) была произведена оценка ядра возникающих интегральных уравнений на основе асимптотического поведения специальных функций.

4. Был проведен качественный анализ задач, где нагруженные слагаемые определялись как слабые или сильные возмущения в зависимости от их влияния на единственность решения. Были выявлены и проанализированы «спектральные случаи», при которых задача имела неединственное решение, и была найдена соответствующая собственная функция однородной задачи.

5. Были сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решений граничных задач при определенных условиях на начальные данные и параметры нагруженного слагаемого.

В заключение, все поставленные задачи в работе были выполнены и цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To solving the heat equation with fractional load // Lobachevskii Journal Math. – 2021. – Vol. 42. – P. 2854-2866.
- 2 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М., 2003. – 271 с.
- 3 Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications // Differential Equations. – 1983. – Vol. 19, Issue 1. – P. 86-94.
- 4 Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. On a Problem of Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, Issue 9. – P. 1873-1885.
- 5 Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To Solving the Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, Issue 12. – P. 2854-2866.
- 6 Mainardi F., Paradisi P., Fractional diffusive waves // Journal of Computational Acoustics. – 2001. – Vol. 9, Issue 4. – P. 1417-1436.
- 7 Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analytics. – 2001. – Vol. 4, Issue 2. – P. 153-192.
- 8 Pskhu A., Rekhviashvili S., Fractional Diffusion-Wave Equation with Application in Electrodynamics // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, Issue 11. – P. 1-13.
- 9 Javed S., Malik S., On the solution of multi-term time fractional diffusion-wave equation involving ultra-hyperbolic operator // Physica Scripta. – 2024. – Vol. 99, Issue 3. – P. 035004.
- 10 Shitikova M., Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review // Mechanics of Solids. – 2022. – Vol. 57, Issue 1. – P. 1-33.
- 11 Mamchuev M., Mamchuev A. Fourier Problem for Fractional Diffusion-Wave Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, Issue 2. – P. 620-628.
- 12 Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Nonlinear Dynamics. – 2002. – Vol. 29. – P. 145-155.
- 13 Daftardar-Gejji V., Jafari H. Boundary value problems for fractional diffusion-wave equations // Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2006. – Vol. 3. – P. 1-18.
- 14 Scherer R., Kalla S., Boyadjiev L. et al. Numerical treatment of fractional heat equations // Applied Numerical Mathematics. – 2008. – Vol. 58, Issue 8. – P. 1212-1223.
- 15 Jafari H., Daftardar-Gejji V. Solving linear and non-linear fractional diffusion and wave equations by Adomain decomposition // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 180. – P. 488-497.

- 16 Beibalaev V., Shabanova M. A Finite-Difference Scheme for Solution of a Fractional Heat Diffusion-Wave Equation without Initial Conditions // *Thermal Science*. – 2015. – Vol. 19, Issue 2. – P. 531-536.
- 17 Qasemi S., Rostamy D. New local discontinuous Galerkin method for a fractional time diffusion wave equation // *International Journal of Computer Mathematics*. – 2018. – Vol. 96, Issue 6. – P. 1-22.
- 18 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Kosmakova M.T. et al. On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain // *Eurasian Mathematical Journal*. – 2020. – Vol. 11, Issue 3. – P. 89-94.
- 19 Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Tuleutaeva Zh.M. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2022. – Vol. 43, Issue 8. – P. 2133-2144.
- 20 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T. et al. Uniqueness and non-uniqueness of solutions of the boundary value problems of the heat equation // *Advancements in Mathematical Sciences: proceed. of the internat. conf. on Advancements in Mathematical Sciences*. – Antalya, 2015. – P. 145-151.
- 21 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T. et al. On the spectrum of Volterra integral equation with the incompressible kernel // *AIP Conference Proceedings*. – 2014. – Vol. 1611. – P. 127-132.
- 22 Kosmakova M.T. On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series* – 2016. – Vol. 1, Issue 81. – P. 62-67.
- 23 Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tokesheva A.S. et al. On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. – 2016. – Vol. 4, Issue 84. – P. 80-87.
- 24 Zhakupbekova A.Zh., Koshkarova B.S. About the properties of certain integral operators in weighted Holder spaces // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. – 2010. – Vol. 1, Issue 57. – P. 25-28.
- 25 Podlubny I., Thimann K.V. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. – NY, 1999. – 366 p.
- 26 Rajan A., Desai S., Sidhardh S. Element-free Galerkin method for a fractional-order boundary value problem // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2024. – Vol. 125, Issue 8. – P. e7429.
- 27 Sidhardh S., Patnaik S., Semperlotti F. Fractional-order shell theory: formulation and application to the analysis of nonlocal cylindrical panels // *Journal of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 89, Issue 8. – P. 1-22.
- 28 Attayev A.Kh., Iskakov S.A., Karshigina G.Zh. et al. The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. – 2014. – Vol. 4, Issue 76. – P. 11-16.
- 29 Iskakov S.A., Ramazanov M.I., & Ivanov I.A. The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. – 2015. – Vol. 2, Issue 78. – P. 25-30.

- 30 Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.
- 31 Kosmakova M., Izhanova K., Khamzeyeva A. On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2022. – Vol. 4, Issue 108. – P. 98-106.
- 32 Kosmakova M., Ramazanov M., Kasymova L. To Solving the Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, Issue 12. – P. 2854-2866.
- 33 Pskhu A., Kosmakova M., Akhmanova D. et al. Boundary value problem for the heat equation with a load as the Riemann-Liouville fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2022. – Vol. 1, Issue 105. – P. 74-87.
- 34 Pskhu A., Ramazanov M., Kosmakova M. Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation // Turkish Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 47, Issue 5. – P. 1585-1594.
- 35 Jenaliyev M., Ramazanov M., Kosmakova M. et al. On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11, Issue 3. – P. 89-94.
- 36 Kosmakova M., Ramazanov M., Tokesheva A. et al. On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2016. – Vol. 84, Issue 4. – P. 80-87.
- 37 Nakhushiev A.M., Borisov V.N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of ground water level // Differ. Uravn. – 1977. – Vol. 13. – P. 105-110.
- 38 Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И., Искаков С.А. Нагрузки в дифференциальных уравнениях как возмущения // Научное и творческое наследие академика Е.А. Букетова: матер. междунар. науч.-конф. – Қарағанды, 2015. – С. 145-148.
- 39 Attaev A.Kh. On a characteristic problem for a loaded hyperbolic equation // Bull. Karaganda Univ. Mathematics Series. – 2019. – Vol. 4, Issue 96. – P. 15-21.
- 40 Attaev A.Kh. Boundary control problem for a loaded string vibration equation // Differ. Equat. – 2020. – Vol. 56. – P. 635-640.
- 41 Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. On a problem of heat equation with fractional load // Lobachevskii Journal. Math. – 2020. – Vol. 41. – P. 1873-1885.
- 42 Kosmakova M.T., Iskakov S.A., Kasymova L.Zh. To solving the fractionally loaded heat equation // Bull. Karaganda Univ. Mathematics Series. – 2021. – Vol. 1, Issue 101. – P. 65-77.
- 43 Kosmakova M.T., Izhanova K.A., Khamzeyeva A.N. “On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative // Bull. Karaganda Univ. Mathematics Series. – 2022. – Vol. 108, Issue 4. – P. 98-106.,

44 Pskhu A.V., Kosmakova M.T., Akhmanova D.M. et al. Boundary value problem for the heat equation with a load as the Riemann – Liouville fractional derivative // Bull. Karaganda Univ. Mathematics Series. – 2022. – Vol. 105, Issue 1. – P. 74-87.

45 Abdullaev O.L., Yuldashev T.K. Inverse problems for the loaded parabolic-hyperbolic equation involves Riemann – Liouville operator // Lobachevskii J. Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 1073-1083.

46 Pskhu A.V., Ramazanov M.I., Kosmakova M.T. Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation // Turk. J. Math. – 2023. – Vol. 47. – P. 1585-1594.

47 Pskhu A.V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order // Izv. Math. – 2009. – Vol. 73. – P. 351-392.

48 Kosmakova M., Izhanova K., Khamzeyeva A. On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2022. – Vol. 4, Issue 108. – P. 98-106.

49 Kosmakova M.T., Izhanova K.A., Kasymova L.Zh. A fractionally loaded boundary value problem two-dimensional in the spatial variable // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – Vol. 2, Issue 110. – P. 72-83.

50 Kosmakova M., Akhmanova D., Izhanova K. BVP with a Load in the Form of a Fractional Integral // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 2024. – P. 1-12.

51 Pskhu A.V., Kosmakova M.T., Izhanova K. Cauchy Problem for a Loaded Fractional Diffusion Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, Issue 9. – P. 4574-4581.

52 Kosmakova M., Akhmanova D., Izhanova K. Solving an initial boundary value problem for a loaded fractional-order diffusion equation // Сб. тез. 7-го всемир. конгр. Математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023). – Туркистан, 2023. – С. 86.

53 Kosmakova M., Izhanova K. Boundary value problem for a fractional diffusion equation with a fractional load // Сб. тез. 7-й междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2023. – С. 351-352.

54 Kosmakova M., Akhmanova D., Izhanova K. Boundary value problem with a load in the form of a fractional integral // Сб. тез. Традиц. междунар. апрельс. матем. конф. – Алмата, 2024. – С. 210-211.

55 Kosmakova M., Akhmanova D., Izhanova K. On the solution of a BVP for an equation with fractional derivative // Сб. тез. Традиц. междунар. апрельс. матем. конф. – Алмата, 2025. – С. 159-160.

56 Космакова М., Ахманова Д., Ижанова К. Жүктелген шеттік есеп туралы // Artificial Intelligence and Inverse Problems in Science, Technology and Industry: Proceedings. – Астана, 2025. – С.35-36.

57 Kosmakova M., Akhmanova D., Izhanova K. On the solution of a BVP for an equation with a fractional derivative // 15-th ISAAC Congress: Abstract book.- Астана, 2025. - P. 100-111.

58 Космакова М.Т., Ахманова Д.М., Ижанова К.А., Хамзеева А.Н. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ // Фундаментальная наука и приоритеты XXI века.- Астана, 2025. -С.62-68.

59 Космакова М.Т., Ижанова К.А., Газизова Д.К. О разрешимости нагруженной задачи теплопроводности с нагрузкой в виде дробного интеграла // Материалы Международной научной конференции «Актуальные задачи математики, механики и информатики», посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. - Караганда, 2022. -С.127-128.

60 Ижанова К.А., Космакова М.Т. Жүгі бөлшектік интеграл түрінде берілген жылуөткізгіштік есебінің шешімі жайлы // Академик Е.А.Бөкетовтің 100 жылдығына орай ұйымдастырылған «Пәнаралық ғылыми зерттеулердің өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы. (Қарағанды, 2025. – Б.85-88).

61 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Shaldykova B.A. On strongly loaded heat equations. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – Karaganda, 2019. -P.8-14.

62 Космакова М.Т., Хамзеева А.Н. (2024) О разрешимости интегрального уравнения, связанного с дробно-нагруженной задачей теплопроводности. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=65678798> (Accessed 1 January 2024).

63 Eshimbetov M., Sarsenbayeva M. The Foka's unified transformation method for heat transfer equation on general metric start graphs. // Сб. мат. Республиканской научно-практической конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики.» -Andijon, 2022.- P. 21-22.

64 Отчет на грантовый проект, АР09259780 «Псевдопараболалық теңдеулер үшін шеттік есептер және ілесетін Вольтерраның ерекше интегралдық теңдеулері». Available at: https://up.buketov.edu.kz/laboratory/17_1kz.pdf (Accessed 15 May 2024).